

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DES VERBANDES
DEUTSCHER PHYSIKALISCHER GESELLSCHAFTEN

VON

M. VON LAUE UND R. W. POHL

140. BAND 3. HEFT

MIT 45 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 21. MÄRZ 1955)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1955

Zeitschrift für Physik

Begründet 1920. Herausgegeben unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von *K. Scheel* und *H. Geiger*, ab Band 129 herausgegeben unter Mitwirkung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften. Band 1—4 (1921): Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. Ab Band 5: Berlin, Springer.

Die „*Zeitschrift für Physik*“ erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 62.—.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht. Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Manuskriptsendungen sind zu richten an einen der Herren Herausgeber: Professor Dr. M. von Laue, Berlin-Dahlem, Faradayweg 4—6; Professor Dr. R. W. Pohl, Göttingen, Bunsenstr. 9.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10 % der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Springer-Verlag OHG.

Berlin W 35, Reichpietschufer 20, Tel. 24 92 51,

Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24, Tel. 24 40,

Göttingen, Weenderstraße 60, Tel. 21 53.

Inhalt.

Seite

WAIDELICH, W., Röntgenmessung des AgBr-Netzebenenabstands in photographischen Schichten mit latentem Bild. Mit 8 Figuren im Text. (Eingegangen am 11. November 1954)	241
PAUL, W., und M. RAETHER, Das elektrische Massenfilter. Mit 10 Figuren im Text. (Eingegangen am 14. November 1954)	262
ECKER, G., Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung. I. Grundlagen und Grenzen kollektiver Beschreibung. (Eingegangen am 29. November 1954)	274
ECKER, G., Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung. II. Die Bedeutung der Beschränkungen des D-Modelles für die Begriffsbildung und Ergebnisse kollektiver Beschreibung. (Eingegangen am 24. Dezember 1954)	293
FICK, E., Die Polarisation des Lichtes durch asphärische, ferromagnetische Teilchen in einem homogenen Magnetfeld. II. Theorie. Mit 11 Figuren im Text. (Eingegangen am 4. November 1954)	308
MEISSNER, W., und R. DOLL, Gleichzeitige oszillographische Registrierung von Widerstand und magnetischem Fluß für Indium-Einkristalle im Übergangsbereich zur Supraleitung bei starker Strombelastung. Mit 16 Figuren im Text. (Eingegangen am 10. Dezember 1954)	340

Röntgenmessung des AgBr-Netzebenenabstands in photographischen Schichten mit latentem Bild*.

Von

WILHELM WAIDELICH.

Mit 8 Figuren im Text.

(Eingegangen am 11. November 1954.)

Zur Messung des AgBr-Netzebenenabstands an bewegtem Film werden zwei DEBYE-Rückstrahlapparaturen hoher Meßgenauigkeit beschrieben, mit denen die Frage untersucht wird, ob sich die Gitterkonstante des Silberbromids bei der Entstehung des latenten photographischen Bildes ändert. Gittermessungen an fünf verschiedenen Agfa-Emulsionen ergeben eine mit steigenden Licht- und Röntgenexpositionen zunehmende sehr kleine Aufweitung des Gitters. Stärkere, in das Gebiet der Solarisation führende Vorbelichtungen rufen eine Schrumpfung des zuvor geweiteten Gitters hervor. Qualitativ stimmt dieses Ergebnis mit dem Befund von HESS [2] überein, dessen Gitteränderungen jedoch um mehr als eine Größenordnung höher liegen. Die Gitteraufweitung läßt sich als Mischkristallbildung zwischen Ionengitter und den bei der Belichtung entstehenden Zentren des latenten Bildes auffassen. Nach erreichter Sättigung tritt bei weiterer Belichtung eine Ausscheidung von Silber in heterogener Phase ein, wobei die Gitterkonstante des Silberbromids wieder abnimmt.

Aus den Röntgenaufnahmen ergibt sich ferner ein systematischer Zusammenhang zwischen Emulsionsempfindlichkeit und Gitterkonstante. Unempfindliche Emulsionen besitzen infolge teilweiser Substitution der Br-Ionen durch Cl-Ionen eine gegenüber reinem AgBr verkleinerte Gitterkonstante, während umgekehrt bei empfindlichen Emulsionen der Gitterparameter durch den Einbau von J-Ionen vergrößert ist. Die (in der Regel besonders großen) AgBr-Körner hochempfindlicher Emulsionen sind, wie aus der Verbreiterung ihrer Röntgenlinien zu schließen, in sehr kleine Mikrobereiche unterteilt. Da das innere latente Bild nach neueren, insbesondere auf Beobachtungen an AgBr-Einkristallen gestützten Vorstellungen (HEDGES und MITCHELL [29]) an inneren Oberflächen entsteht, kommt dieser Substruktur ein besonderes Interesse zu. — Bei den untersuchten Emulsionen gibt sich die mit der Belichtung fortschreitende Ausbildung eines Silbergitters dadurch zu erkennen, daß nach sehr großen Expositionen mit Licht, Röntgenstrahlen oder Elektronen schwache Silberringe auf den DEBYE-Aufnahmen erscheinen.

1. Einleitung.

Unter den vielen Problemen, welche das latente Bild aufwirft, erhebt sich in neuerer Zeit die Frage, ob sich die Gitterkonstante des Silberbromids bei der Entstehung des latenten Bildes ändert. Die bisher in Deutschland, USA. und Holland aus Röntgenmessungen gewonnenen Resultate geben ein recht widerspruchsvolles Bild. In der vorliegenden Arbeit wird über neue, mit einer verbesserten Apparatur durchgeführte Gittermessungen berichtet.

* Zum Teil vorgetragen auf der Physikertagung Erlangen 1954 [28].

Die ersten Röntgenmessungen an in photographischen Emulsionen enthaltenen AgBr-Kristallen wurden zwar von KOCH und VOGLER [1] schon im Jahre 1925 ausgeführt. Da nur Reflexionen mit kleinem BRAGGSchen Winkel vermessen wurden, bei denen das Auflösungsvermögen zur Feststellung geringer Gitteränderungen nicht hinreicht, konnte jedoch keine Abhängigkeit der Gitterkonstante von der Belichtung gefunden werden.

In einer dem Problem besser angepaßten Apparatur, die auf S. 244 kurz beschrieben wird, führte 1943 HESS [2] Messungen des AgBr-Netzebenenabstands an bewegtem LAUE-Film durch, die eine *Aufweitung* des Gitters mit zunehmender Röntgenexposition ergaben. Nach sehr starken Röntgenbelichtungen, im Gebiet der Solarisation, setzte eine *Schrumpfung* des zuvor geweiteten Gitters ein.

In den sich bald darauf in USA. und Holland anschließenden Untersuchungen von BRENTANO und SPENCER [3] sowie BURGERS und MESRITZ [4] wurde jedoch keine Gitteränderung bei der Entstehung des latenten Bildes gefunden, obwohl insbesondere bei den letztgenannten Autoren dieselben Versuchsbedingungen wie bei HESS vorlagen. Auch eine auf Dichtebestimmungen beruhende Nachprüfung der HESSschen Resultate durch JUNGHANSS und STAUDE [5] verlief negativ.

Dagegen ermittelte vor kurzem BERRY [6] aus Röntgenmessungen eine *Kontraktion* des Gitters mit fortschreitender Belichtung. Das Gebiet sehr kleiner Vorbelichtungen konnte bei diesen, an stehenden Photoplatten durchgeführten Messungen nicht erfaßt werden.

2. Die Grundlagen der Messungen.

Die Bestimmung des AgBr-Netzebenenabstands erfolgt aus DEBYE-SCHERRER-Aufnahmen an AgBr-Kristallen, wie sie in den photographischen Emulsionen enthalten sind. Im Gegensatz zu Pulveraufnahmen an nicht lichtempfindlichen Substanzen, bei denen die vielstündige Einwirkung des Röntgenstrahls auf das Präparat nicht stört, müssen im vorliegenden Fall die untersuchten Filme so durch den Strahl bewegt werden, daß das einzelne Korn nur einmal kurzzeitig abgetastet wird. Hierbei darf keine nennenswerte Belichtung erfolgen. Schließt man an eine Messung unbelichteten Films weitere Messungen nach zunehmender Vorbelichtung an, so kann auf diese Weise das Verhalten des AgBr-Gitters beim Aufbau des latenten Bildes untersucht werden.

Der Netzebenenabstand d wird in bekannter Weise aus der BRAGGSchen Gleichung, in welcher der BRAGGSche Winkel ϑ durch den Ergänzungswinkel $\varphi^\circ = 90^\circ - \vartheta^\circ$ ersetzt ist, ermittelt:

$$d = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \quad (1)$$

(λ = Röntgenwellenlänge; a = Gitterkonstante; hkl = MILLERSche Indizes). Als experimentellen Wert für die Bestimmung von d oder a aus Gl. (4) benötigt man den Winkel φ . Er gibt sich aus dem Durchmesser R der Interferenzringe bei Plankameraufnahmen zu

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{R}{2A}. \quad (2)$$

Der Abstand A zwischen Präparat und dem die Interferenzen registrierenden Film wird aus mitaufgenommenen Aluminium-Eichstoffringen ermittelt.

Für die zwischen den Vorbelichtungen B_1 und B_2 auftretende relative Gitteränderung besteht die Beziehung

$$\frac{d_{B_2} - d_{B_1}}{d_{B_1}} = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2}. \quad (3)$$

Zum Nachweis kleiner Gitteränderungen eignen sich am besten Rückstrahlaufnahmen (vgl. [7] bis [10]), da die durch eine relative Gitteränderung $\Delta d/d$ hervorgerufene Winkeländerung $\Delta \varphi$, zufolge der sich aus der differenzierten BRAGGSchen Gleichung ergebenden Beziehung

$$\Delta \varphi = \operatorname{ctg} \varphi \frac{\Delta d}{d}, \quad (4)$$

bei kleinem Winkel φ am größten ist.

Die Durchmesseränderung ΔR der Interferenzringe ist bei Plankameraufnahmen

$$\Delta R = \frac{\Delta d}{d} 4A \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\cos^2 2\varphi}. \quad (5)$$

Bei dem vorliegenden Problem erhält man die günstigsten Aufnahmebedingungen¹ mit Kobalt- $K\alpha$ -Strahlung, die bei dem Winkel $\varphi = 11,3^\circ$ den starken AgBr-Reflex $\sum (h^2 + k^2 + l^2) = 40$ erzeugt. Alle beschriebenen Messungen beziehen sich auf diesen mit Co- $K\alpha$ -Strahlung aufgenommenen (620)-Interferenzring.

Zur Erzeugung der Co-Strahlung diente eine Siemens-Feinstruktur- α -röhre. Die $K\beta$ -Strahlung wurde durch ein $7,7 \mu$ dickes Eisenfilter absorbiert. Die Röhre wurde bei den Aufnahmen in der Regel mit 30 kV Gleichspannung und einer Stromstärke von 12 mA betrieben. Mit magnetischen Spannungskonstanthaltern war die Primärspannung der gesamten Anlage auf $\pm 2\%$, die der Röntgenröhrenheizung auf $\pm 0,4\%$ stabilisiert.

3. Die Aufnahmeapparatur.

Für die Aufnahmen wird eine DEBYE-Rückstrahlapparat benötigt, bei der an Stelle des üblichen Stäbchenpräparats ein bewegter Film

¹ Ein Nachteil besteht aber in der Koinzidenz mit dem Silberreflex $\sum (h^2 + k^2 + l^2) = 20$. Vgl. hierzu die auf S. 250 folgenden Ausführungen.

vom Röntgenstrahl abgetastet wird. Dieser Film wird im folgenden *Präparat*-Film genannt, zum Unterschied von dem die Interferenzen aufnehmenden *Registrier*-Film.

3.1. Das Trommelsystem.

Die einfachste Methode, den Präparatfilm so durch den Röntgenstrahl zu bewegen, daß jedes AgBr-Korn nur einmal kurz vom Strahl getroffen wird, besteht darin, daß man ihn auf eine Trommel auflegt, die sich vor dem Röntgenstrahl schraubenförmig bewegt.

Um die an einer massiven Trommel entstehende Streustrahlung zu vermeiden, spannte HESS [2], der dieses Prinzip als erster benutzte, den Film zwischen zwei im Abstand von einigen Zentimetern angeordneten Trommelscheiben auf und tastete nur die mittlere freitragende Filmpartie ab. Die für die Aufnahme wichtige Forderung der Konstanz des Abstands zwischen Präparat- und Registrierfilm ist bei dieser Anordnung jedoch nicht gut erfüllt. Wie sich in Modellversuchen zeigte, bleibt der Präparatfilm auch bei noch so fester Aufspannung auf die beiden Trommelscheiben nicht in der durch diese vorgeschriebene Lage. Schon bei kleinen Änderungen des Feuchtigkeitsgehalts der Gelatine biegt sich der Film (in der Regel in Richtung auf die Trommelachse) durch¹. Dabei wurden radiale Abstandsänderungen bis zu 1 mm festgestellt. Aber selbst wenn derartige Lageänderungen, wie bei der unten beschriebenen Trommel, ausgeschaltet werden, bleiben noch kleine, durch das unvermeidliche Lagerspiel des Trommelantriebs verursachte Abstands-schwankungen.

Eine gewisse Einschränkung bedeutet ferner die Tatsache, daß für eine einmalige Abtastung nur eine begrenzte Filmfläche zur Verfügung steht. Da eine DEBYE-Aufnahme eine vielstündige Belichtungszeit erfordert, resultiert hieraus eine sehr kleine Abtastgeschwindigkeit, die eine verhältnismäßig starke Röntgenbelichtung des Präparatfilms zur Folge hat. Messungen im Gebiet sehr kleiner Vorbelichtungen — im Grenzfall der Vorbelichtung Null — sind also grundsätzlich unmöglich.

Zur Verkleinerung der bei freitragendem Präparatfilm auftretenden Abstandsfehler wurde eine einfache Aluminiumtrommel gebaut, auf welcher der Präparatfilm auch im Abtastbereich überall aufliegt. Ein Durchbiegen des Films im Sinne einer Vergrößerung des Abstands Registrier-Präparatfilm ist dann nicht mehr möglich. Ein Losdrücken des Präparatfilms nach vorne kann dadurch vermieden werden, daß der

¹ Als Beispiel dafür, wie groß die beim Trocknen der Gelatine auftretenden Kräfte sein können, sei angeführt, daß bei in trockener Luft gelagerten Kernplatten die Glasunterlage oft zerspringt. Infolge der großen Schichtdicke sind bei Kernplatten die Wirkungen der Gelatine besonders groß. Ferner sei auf die Herstellung von Kathedralglas verwiesen, die darauf beruht, daß auf Glasscheiben aufgespritzter Leim beim Trocknen einzelne Stücke der Glasoberfläche herausreißt.

Film an seinen Rändern mit Gummibändern nur so fest gehalten wird, daß die im Laufe einer Aufnahme allenfalls auftretenden Spannungen sich durch kleine Verschiebungen in achsialer und äquatorialer Richtung ausgleichen können¹.

Das Schlagen der Trommel bei der schraubenförmigen Bewegung wurde dadurch herabgesetzt, daß zusätzlich zum Antriebslager, dessen Spiel nicht beliebig klein gehalten werden kann, ein besonderes Führungslager verwendet wurde. Die von der Aluminiumunterlage herrührende Streustrahlung konnte durch Verwendung sehr weicher Strahlung (Röhrenspannung = 10 kV), die beim zweimaligen Durchgang durch den Film weitgehend absorbiert wird, auf ein erträgliches Maß reduziert werden. (Die Absorption bei der Durchstrahlung des Films beträgt bei Co-K-Strahlung, deren Anregungsspannung 8 kV beträgt, je nach Filmsorte 34 bis 54%.)

Als DEBYE-Kammer konnte im Abstand von 30 mm eine Plan- oder Rundkammer angesetzt werden.

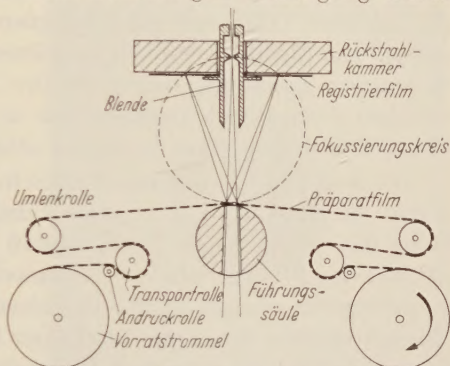


Fig. 1. Das Prinzip der Lauffilmapparatur.

3.2. Die Lauffilmapparatur.

Die erstrebte Konstanz des Abstands Präparat—Registrierfilm kann dadurch noch weitergetrieben werden, daß drehbare Teile an der für die Abtastung maßgebenden Stelle überhaupt vermieden werden. Mit der in Fig. 1 dargestellten Apparatur, die im Prinzip einer Filmkamera gleicht, läßt sich dies in einfacher Weise erreichen. Der von der Vorrattrommel kommende perforierte 35 mm-Normalfilm wird so an der fest in eine Marmorgrundplatte eingelassenen Führungssäule vorbeigezogen, daß er gerade an der Stelle ihrer Oberfläche anliegt, auf die der primäre Röntgenstrahl einfällt. Der Film muß hierzu nicht nur auf der Aufspulseite gleichmäßig angetrieben, sondern auch auf der Abspulseite konstant gebremst werden. Der Präparatfilm kann hier während einer DEBYE-Aufnahme mehrfach ausgewechselt werden, ohne daß der durch die Geometrie der Anordnung festgelegte Abstand dabei verändert wird². Die

¹ Wenn die Schichtseite außen liegt, hat der Film im allgemeinen die Tendenz, sich nach innen durchzubiegen.

² Ein wiederholtes Nachladen der Hessschen Doppelstrommel während einer DEBYE-Aufnahme würde zwar infolge der dann möglichen größeren Abtastgeschwindigkeit ein Vordringen in das Gebiet kleiner Vorbelichtungen gestatten, ist aber wegen der gerade kurz nach dem Auflegen eines Films besonders heftig und unkontrollierbar auftretenden radialen Lageänderungen nicht ratsam.

Apparatur kann 30 m lange Filmbänder aufnehmen. Der Filmverbrauch für eine Aufnahme beträgt normalerweise etwa 100 m. Vor allem sind auf diese Weise auch Gittermessungen im Gebiet sehr kleiner Vorbelichtungen möglich, da die über den Grundschiefer hinausgehende Schwärzungszunahme durch die erste Abtastung nur $\Delta S = 0,1$ beträgt.

Zur Erhöhung der Lichtstärke und zur Erzielung scharfer Linien wurde, wie aus Fig. 1 ersichtlich, eine Kombination von SEEMANN-BOHLIN-Fokussierung und Rückstrahlverfahren angewandt. Die Einstellung der Rundblende erfolgte so, daß die Fokussierungsbedingung für die AgBr-Interferenz (620) erfüllt war. Die zu beiden Seiten liegenden Al-Eichlinien (334) und (420) kommen dann ebenfalls noch genügend scharf. Die Blendenweite, der bei diesen Messungen eine ganz besondere Bedeutung zukommt, betrug in der Regel 0,3 mm. Mit den sonst üblichen 1 mm-Blenden können, wie sich bei den Messungen zeigte, bei vielen Emulsionen keine genügend scharfen Linien erzielt werden.

Der Nullstrahl verläßt durch einen in die Führungssäule eingelassenen Kanal die Apparatur. Das ganze Filmlaufwerk sitzt auf einem in der Höhe fein verstellbaren Tisch, so daß zusammen mit dem Richtungswechsel des Filmantriebs eine zeilenweise Abtastung des Präparatfilms vorgenommen werden kann. Bei einem Querschnitt des auftretenden Röntgenbündels von 2 mm^2 und einer Filmgeschwindigkeit von 15 mm pro sec beträgt die maximale Kornbelichtungszeit nur $1/10$ sec.

Laufrichtung, Geschwindigkeit und Vorratslänge des Präparatfilms lassen sich durch Lichtsignalanlagen überwachen, was in Anbetracht der langen Aufnahmezeiten (50 bis 80 Std) zur Vermeidung von Fehlbelichtungen wichtig ist, da jede Störung (etwa durch Reißen des Präparatfilms) sofort erkannt werden kann.

Die Temperatur wurde während der Aufnahmen durch einen kombinierten Wasser—Luft-Thermostaten auf $\pm 1/10^\circ \text{C}$ konstant gehalten.

Als Registrierkammer wurde eine Plankammer gewählt. Im Gegensatz zu Rundkammern, bei denen die Linienabstände nur im Äquator vermessen werden können, hat man hier ein System konzentrischer Ringe zur Verfügung, das die Bestimmung der Durchmesser in allen beliebigen Richtungen erlaubt. Man kann auf diese Weise Fehlstellen im Film bei der Auswertung umgehen und darüber hinaus durch Messungen an verschiedenen Stellen über Kornschwankungen mitteln.

Auch der Registrierfilm muß während der Aufnahme eine gut definierte Lage in der Plankammer behalten. Um ein gutes Anliegen des Registrierfilms auf der Planplatte zu erreichen, wurde er in der Mitte mit einer bis nahe an die innerste Al-Eichlinie heranreichende, mit Wildleder überzogenen Messingscheibe angedrückt. Die mit Hilfe eines Bajonettverschlusses an der Kameraplatte befestigte Andruckscheibe preßt den Film mit stets gleichbleibendem Druck gegen seine Unterlage.

Es ist günstig, dem Registrierfilm an seinen Außenrändern eine kleine Bewegungsfreiheit zu belassen. Am geeignetsten erwiesen sich Halteleisten, die durch Federn so auf den Film gedrückt wurden, daß auch in tangentialer Richtung eine nach außen gerichtete Kraftkomponente wirkt, die den Film zu spannen sucht.

Setzt man als Grenzwert für die unter günstigsten Bedingungen bei sehr scharfen Röntgenlinien noch erfaßbare Durchmesseränderung $\Delta R = 1 \cdot 10^{-2}$ mm, so ergibt sich nach Gl. (5) mit $A = 58,5$ mm und $\varphi = 11,3^\circ$ für die in der Lauffilmapparatur noch nachweisbare relative Gitteränderung $\Delta d/d = 1 \cdot 10^{-5}$.

4. Voruntersuchungen.

Gleichzeitig mit der Einjustierung der Aufnahmeapparaturen wurden verschiedene Filmsorten auf ihre Eignung für Gittermessungen untersucht. Einige hierbei gemachten Beobachtungen sollen kurz beschrieben werden.

4.1. Die Schärfe der Interferenzringe.

Die untersuchten (620)-Interferenzringe empfindlicher Kleinbildemulsionen geben breite, verwaschene Ringe. Insbesondere bleibt bei hochempfindlichen Emulsionen (Lichtempfindlichkeit $\geq 21/10^\circ$ DIN) die Aufspaltung in α_1 - und α_2 -Ringe ganz aus. Als Beispiel für eine Emulsion, bei der keine Aufspaltung mehr eintritt, ist in Fig. 2 eine Beugungsaufnahme des Agfa-Isopan ISS-Films (Lichtempfindlichkeit $21/10^\circ$ DIN) wiedergegeben. Während die Al-Eichlinien (331) und (420) eine für Rückstrahlaufnahmen ausgezeichnete Schärfe aufweisen, ist der AgBr-Ring (620) so unscharf, daß die visuelle Bestimmung des Intensitätsmaximums nicht mehr mit der erforderlichen Genauigkeit möglich ist. Eine photometrische Ausmessung führt aber auch bei derart diffusen Linien noch zum Ziel. Die Schärfe der Al-Linien liefert gleichzeitig einen Beweis für die gute Konstanz des Abstands zwischen Registrier- und Präparatfilm bei Aufnahmen nach der Methode des durchlaufenden Films. Mit abnehmender Empfindlichkeit der Emulsionen nimmt die Linienschärfe des AgBr-Reflexes zu. Bei dem in Fig. 3 gezeigten Ausschnitt aus einem Rückstrahldiagramm von Agfa-Igepe-Film (Lichtempfindlichkeit $< 10/10^\circ$ DIN) treten verhältnismäßig scharfe, gut aufgespaltene Reflexe auf. Dies ist für die Auswertung recht günstig.

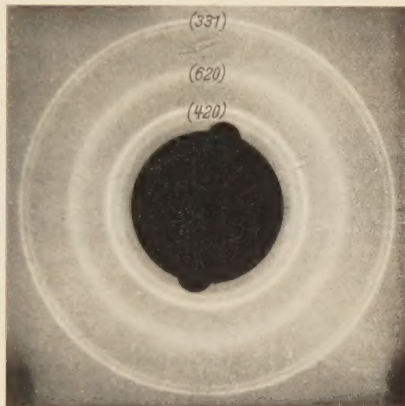


Fig. 2. Rückstrahlaufnahme von Isopan-ISS-Film. [(331) und (420) sind Al-Eichlinien, (620) ist der AgBr-Beugungsring.]

Die schärfsten Linien wurden bei Aufnahmen an (nicht bewegten) Kernplatten gefunden, die bekanntlich eine extrem geringe Lichtempfindlichkeit aufweisen [15]. Wegen dieser vom Standpunkt der Korngröße unerwarteten Beziehung vgl. Abschnitt 4.3.

4.2. Der Durchmesser der Interferenzringe.

Auch der Durchmesser der Beugungsringe, und damit die Gitterkonstante, ändert sich mit der Empfindlichkeit einer Emulsion. Gitterkonstante und Empfindlichkeit nehmen gleichsinnig zu. Da die Emulsiionskörner nicht aus reinem AgBr, sondern aus mehr oder weniger kompliziert zusammengesetzten Mischkristallen bestehen, ist die resultierende Gitterkonstante nach der VEGARDSchen Additivitätsregel vom



Fig. 3. Ausschnitt aus einer Rückstrahlaufnahme von Igepe-Film.

Atomprozentgehalt und Ionenradius der einzelnen Komponenten abhängig. Das beobachtete Verhalten ist durchaus verständlich, da bei unempfindlichen Emulsionen ein Teil der Br-Ionen durch die kleineren Cl-Ionen

ersetzt ist, wodurch die Gitterkonstante der Substitutionsmischkristalle gegenüber der von reinem AgBr abnimmt. Bei empfindlichen Emulsionen wird umgekehrt das AgBr-Gitter durch den Einbau von Jod-Ionen aufgeweitet. Bei den vermessenen Agfa-Filmen unterscheiden sich die Gitterkonstanten der verschiedenen Emulsionen bis zu 4,5 % (vgl. Tabelle 1 auf S. 259).

Die in 4.1 und 4.2 beschriebenen Eigenschaften sind so charakteristisch, daß aus der DEBYE-Aufnahme einer unbekannten Emulsion ein Schluß auf deren Lichtempfindlichkeit gezogen werden kann. Auch für die Röntgenempfindlichkeit besteht ein derartiger, wenn auch weniger stark ausgeprägter Zusammenhang.

4.3. Die Ursachen der Linienverbreiterung.

Zur Klärung der Ursache für die bei hochempfindlichen Emulsionen gefundene starke Verbreiterung der AgBr-(620)-Linie wurde nach der von KOCHENDÖRFER [12] angegebenen Methode der Gang der Linienbreite mit dem BRAGGSchen Winkel untersucht. Aus Messungen der Halbwertsbreiten für verschiedene Interferenzen kann man Teilchengröße A und Gitterverzerrung $\delta a/a$ getrennt ermitteln, da beide Einflüsse eine mit dem BRAGGSchen Winkel ϑ verschieden zunehmende Verbreiterung hervorrufen. Nach der Methode des fokussierenden Plattenverfahrens (s. [12]) wurde für eine Reihe von Interferenzen je eine Aufnahme gemacht. Aus den photometrisch ermittelten Halbwertsbreiten b ,

an denen nach 12 noch Korrekturen für Photometerspaltbreite, die Überlagerung der zwei benachbarten Linien $K\alpha_1$ und $K\alpha_2$, die Blendenweite und die natürliche Spektrallinienbreite anzubringen sind, erhält man durch graphische Darstellung der Funktionen $b \operatorname{ctg} \theta$ und $b \cos \theta$ rasch einen Überblick über die an der Verbreiterung beteiligten Ursachen. So kann man aus dem in Fig. 4 für ISS-Ultra-Film wiedergegebenen Verlauf entnehmen, daß die Linienverbreiterung mit steigendem Winkel θ vorwiegend auf Teilchenkleinheit beruht, was immer dann der Fall ist, wenn die Kurve $b \cos \theta$ parallel zur Abszissenachse verläuft.

Die Größe der kohärenten Gitterbereiche beträgt bei dem höchstempfindlichen ISS-Ultra-Film nur $2,5 \cdot 10^{-6}$ cm¹.

Bei den bis jetzt vermessenen unempfindlicheren Emulsionen sind diese Mikrobereiche, wie sie hier genannt werden sollen, drei- bis fünfmal größer als bei Ultra-Film, so daß offenbar ein systematischer Gang mit der Empfindlichkeit vorhanden ist. Die makroskopische Korngröße zeigt gerade das entgegengesetzte Verhalten, sie fällt (in der Regel) mit abnehmender Empfindlichkeit. Die Vermutung liegt nahe, daß die an der Grenze dieser Mikrobereiche auftretenden inneren Oberflächen eine wesentliche Rolle bei der Entstehung des latenten Bildes spielen.

Einer der Einwände, die gegen die in ihren großen Zügen allgemein anerkannte Theorie von GURNEY und MOTT 19 erhoben werden, bezieht sich darauf, daß diese Theorie nicht in der Lage ist, die nach starker Bestrahlung auftretende Abscheidung von Silberpartikeln im Innern von AgBr-Körnern zu deuten (vgl. 17). Diese Schwierigkeit ist sofort behoben, wenn man sich das im Innern aufgebaute Bild an den Oberflächen dieser Mikrobereiche entstanden denkt. Man braucht dann den Aufbau des inneren Bildes nicht als wesentlich verschieden von der Entstehung des äußeren Bildes zu betrachten. In beiden Fällen sind Oberflächen zum Wachstum der Keime notwendig. Ein quantitativer Unterschied besteht insofern, als Oberflächenkeime beliebig wachsen können, während den Innenkeimen nur ein begrenztes Volumen zur Verfügung steht. Auf elektronenmikroskopischen Aufnahmen 20, 21 ergibt sich eine unterschiedliche Größe von solchen Keimen, die durch Röntgenstrahlen

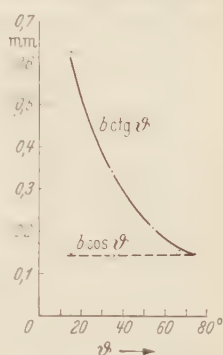


Fig. 4. Graphische Darstellung des Verlaufs von $b \operatorname{ctg} \theta$ und $b \cos \theta$ als Funktion des BRAGG'schen Winkels θ zur getrennten Ermittlung von Teilchengröße und Gitterverzerrung bei ISS-Ultra-Film.

¹ Ein würfelförmig angenommenes Korn dieser Emulsion, das eine mittlere Kantenlänge von $100 \cdot 10^{-6}$ cm aufweist, ist also in rund 40^3 Mikrobereiche unterteilt, die (bei der vorliegenden Emulsion zufällig) wieder aus 40^3 Elementarzellen bestehen.

und solchen, die durch Licht hervorgerufen sind, wobei die kleineren Röntgenstrahlkeime höchstwahrscheinlich Innenkeime sind.

In ihren neuesten Untersuchungen an AgBr-Einkristallen kommen HEDGES und MITCHELL [29] zu dem Ergebnis, daß das Innenbild seinen Sitz an inneren Oberflächen hat. Die von KLEIN [30] in einer Übersicht über die neuen MITCHELLSchen Arbeiten aufgeworfene Frage, ob dieses an Einkristallen gewonnene Ergebnis auf die technisch hergestellten photographischen Emulsionen übertragen werden kann, ist nach unseren Röntgenmessungen insofern zu bejahen, als auch bei den Emulsionskörnern die hier beschriebene Substruktur (Aufteilung in sehr kleine, gegeneinander abgegrenzte Mikrobereiche) vorhanden ist, sodaß gerade die innere Oberflächen für die Entstehung des Innenbildes zur Verfügung stehen. Nach HEDGES und MITCHELL können Ag-Zwischengitterionen nur gut in der Nähe der Mosaikgrenzen Elektronen einfangen und wachsen. Dies paßt gut zu dem Ergebnis, daß die hochempfindlichsten Emulsionen die stärkste Linienverbreiterung zeigen.

Die Gitterverzerrungen liegen bei ISS-Ultra-Film in der Größenordnung $0,5 \cdot 10^{-3}$ und liefern keinen Beitrag zur Verbreiterung der Rückstrahllinie. Die Gitterkonstante weicht also auch bei hochempfindlichen Emulsionen nur unwesentlich vom Mittelwert ab. Da in derart komplizierten Mischkristallen mit Schwankungen der Gitterkonstante infolge von Konzentrationsunterschieden zu rechnen wäre, ist dieses Ergebnis einigermaßen unerwartet. Es ist denkbar, daß anfänglich vorhandene Gitterstörungen bei der Reifung ausheilen.

In diesem Zusammenhang sei noch darauf hingewiesen, daß statistisch regellos verteilte Gitterverzerrungen und solche, die nur auf kleine Bereiche beschränkt sind, zwischen denen sich unverzerrte Gebiete befinden, nicht verbreiternd wirken [13], [14]. Eine Linienverbreiterung bei der Entstehung des latenten Bildes ist also zumindest im Gebiet der normalen Belichtungen nicht zu erwarten, was sich mit unseren Beobachtungen deckt. Nach sehr starken Expositionen mit sichtbarem Licht, bei denen nur einige wenige große Bereiche pro Korn durch die Lichteinwirkung verändert werden, wurde eine geringe Zunahme der Halbwertsbreite beobachtet. Da bei Röntgenbelichtung viele kleine statistisch verteilte Keime erzeugt werden, ist es verständlich, daß auch nach großen Röntgenexpositionen keine Linienverbreiterung gefunden wurde.

4.4. Die Ausbildung des Silbergitters nach hohen Belichtungen.

Bekanntlich findet nach großen Belichtungen eine Silberausscheidung statt. Unglücklicherweise komprimiert der Silberreflex $\sum h^2 + k^2 + l^2 = 20$ mit der interessierenden AgBr Rückstrahllinie (620). Da die Emulsionen, wie in 4.2 beschrieben, recht unterschiedliche Gitterkonstanten

aufweisen, würde eine auf den Aufnahmen auftretende Silberlinie bei hochempfindlichen Emulsionen am inneren, bei unempfindlichen am äußeren Rand der AgBr-Linie erscheinen.

Es mußte nun geklärt werden, ob schon nach Vorbelichtungen, wie sie für die Gittermessungen vorgesehen sind, Beugungsringe des photolytisch gebildeten Silbers erscheinen. Dies würde eine Vermessung des so günstig liegenden AgBr-Rings (620) unter Umständen unmöglich machen, da hierdurch leicht Gitteränderungen vorgetäuscht werden könnten. Es zeigte sich bald, daß Ag-Interferenzen erst nach extrem hohen Belichtungen mit sichtbarem Licht auftreten. Silberlinien konnten erst nach Belichtungen, die 10^6 mal so groß sind als zur Erzielung der Schwärzung 1 erforderlich, beobachtet werden. Zunächst erscheinen nur die niedrig indizierten Linien und erst wenn durch noch weiter gesteigerte Vorbelichtung die Silberbereiche weiter angewachsen sind, können auch die Rückstrahllinien einwandfrei festgestellt werden.

Bisher wurde allgemein angenommen (vgl. z.B. [1], [4], [16]), daß durch Röntgenexposition keine zur Entstehung von Silberreflexen hinreichende Silberabscheidung entsteht. BRENTANO und SPENCER [3] erwähnten jedoch Silberlinien nach Röntgenbestrahlung. Nach sehr starken Röntgenbelichtungen zeigten sich auch bei unseren Aufnahmen an den untersuchten Agfa-Filmen bei photometrischer Auswertung sehr schwache Silberlinien. Dem Film mußte hierzu das 10^{10} -fache der zur Schwärzung 1 führenden Dosis, die größenordnungsmäßig 1 r beträgt, aufgestrahlt werden. Die unter großen Beugungswinkeln zu erwartenden Linien sind erst nach noch weiter gesteigerter Bestrahlung des Films zu erhalten.

Da die Silberabscheidung bei Röntgenstrahlen, wie aus elektronenmikroskopischen Beobachtungen [20], [21] bekannt, an sehr vielen über das ganze Korn verteilten Stellen erfolgt, während bei Licht nur einige wenige aber große Bereiche ausgebildet werden, ist das unterschiedliche Verhalten zwischen den beiden Belichtungsarten verständlich. Die Silberbereiche sind bei röntgenbelichteten Emulsionen so klein, daß sie noch keine zur Ausbildung einer Linie hinreichend scharfen Interferenzen geben, es entsteht nur eine diffuse Streustrahlung, die sich in einer geringen Zunahme der Untergrundschwärzung äußert. Die ersten Linien machen sich erst bemerkbar, wenn sich die Bereiche (nach Schätzung aus der Linienbreite) über etwa 3 bis 5 Netzebenen erstrecken.

Während also bei Untersuchungen an röntgenbelichteten Filmen keine Gefahr einer Störung durch den koinzidierenden Ag-Ring besteht, muß nach sehr großen Lichtexpositionen auf diese Möglichkeit geachtet werden. Durch den ebenfalls im Registrierbereich der Rückstrahlkammer liegenden Ag-Ring (331), der mit keiner AgBr- oder Al-Linie zusammenfällt, hat man jedoch eine Kontrollmöglichkeit.

Es sei noch bemerkt, daß auch durch starke Elektroneneinwirkung Silberbereiche entstehen, die sich röntgenographisch nachweisen lassen. Filme, die einige Stunden mit 30 keV-Elektronen bestrahlt waren, zeigten im Röntgendiagramm schwache Silberlinien.

5. Die Durchführung der Gittermessungen.

5.1. Die DEBYE-Aufnahme.

Als *Registrierfilm* wurde ausschließlich doppelt beloggerter LAUT-Film verwendet. Er erwies sich unter den zur Zeit erhältlichen Röntgenfilmen als besonders geeignet, da er (infolge seiner steilen Gradation) trotz der starken, bei den Emulsionsaufnahmen vorhandenen Streustrahlung sich verhältnismäßig gut vom Untergrund abhebende Linien liefert.

Der *Präparatfilm* wurde auf einigen Stellen seiner Oberfläche in möglichst dünner Schicht mit in Zaponlack aufgeschwemmtem Al-Pulver bestrichen, das bei der Aufnahme die Eichlinien liefert.

Bei den Aufnahmen wurde auf Temperaturkonstanz, gleiche Blendelage und Konstanz der Strahlung ganz besonders geachtet. Die Belichtungszeit mit der 0,3 mm-Rundblende betrug beim Betrieb der Röntgenröhre mit 30 kV und 12 mA je nach Emulsion 50 bis 80 Std. Bei einigen Meßreihen wurde für jede Aufnahme ein eigener Registrierfilm benutzt, während bei anderen Serien mit Hilfe einer verstellbaren Sektorenblende jeweils vier aufeinanderfolgende Aufnahmen auf einen Registrierfilm gebracht wurden.

Alle zusammengehörenden Aufnahmen einer Serie wurden gleichzeitig entwickelt. Entwicklungsdauer 8 min in Agfa-Röntgen-Rapid-Entwickler bei 19° C. Die Auswertung erfolgte erst nach einer Trockenzeit von 10 Tagen, während der die Filme um einen geringen Betrag schrumpfen.

5.2. Vorbelichtung.

Die steigende Röntgenvorbelichtung erhalten die Präparatfilme entweder nur durch die bei der sukzessiven Abtastung auf sie treffende Strahlung, oder aber, bei Messungen in größeren Belichtungsschritten, durch besondere Zwischenbelichtungen. Hierzu werden die Filme an einem möglichst gleichmäßig ausgeleuchteten Spalt vorbeigezogen. Expositionen mit sichtbarem Licht erfolgen in analoger Weise.

5.3. Bestimmung der Schwärzung.

Vor und nach jeder DEBYE-Aufnahme wurde ein kleiner Probestreifen vom Präparatfilm abgeschnitten. Alle Streifen einer Aufnahmereihe wurden gemeinsam entwickelt und aus ihnen mit dem Zitzsschen Registrierphotometer die jeweiligen Schwärzungen bestimmt.

5.4. Die Vermessung der Registrierfilme.

Zur Einzeichnung der Ringdurchmesser werden die auf den Filmen enthaltenen Beugungsringe mit einem auf eine transparente Unterlage gezeichneten System konzentrischer Kreise zur Deckung gebracht. In diese Schablone sind einige Durchmesser eingetragen, die als Vorlage zum Einritzen von Durchmessermarken auf dem Rand des Registrierfilms dienen.

Eine visuelle Abstandsmessung der Linien ist bei den breiten, zudem noch eine unsymmetrische Intensitätsverteilung aufweisenden AgBr-Ringen nicht mit der erforderlichen Genauigkeit möglich. Vor allem versagt das sonst viel geübte Anmessen der Linienkanten (vgl. [9]) vollständig, da die Ringe sehr diffus in den Untergrund übergehen.

Bei dem vorliegenden Problem kann die Lage der Linien nur durch photometrische Registrierung genügend genau ermittelt werden. Das ZEISSsche Registrierphotometer eignet sich nicht nur wegen der ihm eigenen mechanischen Präzision hervorragend, sondern vor allem auch wegen der in weiten Grenzen veränderlichen Spalteinstellung, die dem Liniencharakter der verschiedenen Emulsionen jeweils angepaßt werden kann. Bei sehr verwaschenen Ringen wurden mit einem die gleiche Krümmung wie der AgBr-Ring besitzenden Rundspalt¹, der sehr sorgfältig einjustiert sein mußte, noch gut auswertbare Photometerkurven erhalten.

Das Übersetzungsverhältnis 1:1 erwies sich für die Registrierung, die wegen der erforderlichen Genauigkeit der Ausmessung auf Platten erfolgte, besonders günstig. Man erhält dann scharfe, gut ausmeßbare Kurvenspitzen. Schon bei geringer Vergrößerung werden die Spitzen in breite Buckel auseinandergezogen, deren Maxima infolge der zurückgegangenen Flankensteilheit nur ungenau bestimmt werden können. Bei 1:1-Registrierung darf nur mit der kleinsten Registriergeschwindigkeit gearbeitet werden, da sonst die Lage der Kurvenspitzen infolge von Trägheitserscheinungen des Elektrometerfadens verfälscht werden kann. Jede Registrierung wird in beiden Richtungen durchgeführt. Fig. 5 zeigt ein Beispiel eines (mit verschobenem Nullpunkt der Ruhelage des Elektrometerfadens) zweifach photometrierten Präparatfilms.

Mit einem Komparator wurden dann die Linienabstände durch Messen der auf den Photometerplatten erhaltenen Kurvenspitzen bestimmt.

¹ Der Fehler, der dadurch hereinkommt, daß die Krümmung der benachbarten Al-Eichlinien dann von der Spaltkrümmung abweicht, ist sehr klein und fällt bei den hier durchgeführten Relativmessungen ohnehin heraus.

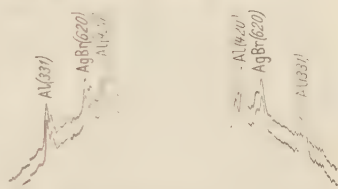


Fig. 5. Photometerkurve einer Rückstrahlungsaufnahme von Igepe-Film.

5.5. Fehlereinflüsse.

Bei der Bestimmung der Gitterkonstanten nach der DEBYE-SCHERRER-Methode können eine Reihe von Fehlern auftreten. Dadurch, daß es sich hier um eine Bestimmung *relativer* Gitteränderungen unter Anwendung von Eichlinien handelt, werden systematische Fehler, wie lineare Filmschrumpfung und Verschiebung der Maxima durch steigenden Untergrund, ausgeschlossen.

Von den verbleibenden nicht systematischen Fehlern konnte durch Anwendung eines Thermostaten der von Temperaturschwankungen herührende Fehler der Gitterkonstanten $< 4 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}$ gehalten werden.

Einen weiteren Fehler bringt die ungenaue Einzeichnung des Durchmessers. Bei einiger Sorgfalt läßt sich erreichen, daß der Abstand des eingezeichneten Durchmessers (der also in Wirklichkeit eine Sehne ist) vom wahren Durchmesser $< 0,5 \text{ mm}$ bleibt. Der Fehler in der Gitterkonstanten ist dann $3 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}$. Abgesehen von der richtigen Markierung des Durchmessers, spielt im Verlauf der weiteren Auswertung die Einstückung des Filmes in die Meßrichtung des Photometers und später der Photometerplatte in die Meßrichtung des Komparators eine gleich wichtige Rolle. Diese Fehler lassen sich aber so klein halten, daß die Auswirkung auf die Gitterkonstante $1 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$ nicht überschreitet.

Wenn der Registrierfilm nicht genau senkrecht zum Primärstrahl steht, entarten die kreisförmigen Beugungsringe zu Ellipsen. Bei einer maximalen Abweichung von 42 Bogenminuten von der Senkrechten, wie sie bei unserer Kamera in einer Richtung auftritt, wird das Endergebnis um $2 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}$ verfälscht¹. Dieser Einfluß kann jedoch dadurch ganz ausgeschaltet werden, daß stets in gleichen Richtungen liegende Durchmesser miteinander verglichen werden. Beim Vergleich von in verschiedenen Richtungen gemessenen Ringdurchmessern kann die kleine Abweichung durch eine Korrektur an den gemessenen Durchmessern berücksichtigt werden.

Von wesentlichem, von Emulsion zu Emulsion verschiedenem Einfluß ist die Unsicherheit, die dadurch entsteht, daß die Spitzen der Photometerkurven infolge von Kornschwankungen nicht immer die wahre Lage des Schwarzungsmaximums der Linien wiedergeben. Ein Bild über die Größe der tatsächlich auftretenden Fehler gewinnt man aus der Streuung der durch Ausmessen verschiedener Ringdurchmesser desselben Filmes erhaltenen Werte. In ungünstigen Fällen ergibt sich bei Aufnahmen in der Lauffilmapparatur eine Abweichung der Ergebnisse vom Mittel um $\pm 5 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$. Bei Filmen mit scharfen Linien beträgt die Streuung nur $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$.

¹ Nach MUNZER [25] kann dieser Einfluß in unserem Fall vernachlässigt werden.

einander parallel. Im ansteigenden Teil der Schwärzungskurve vergrößert sich der AgBr Netzebenenabstand (620) um 0,075 % von 0,91080 Å auf 0,91150 Å. Zum Vergleich mit unserer Gitteränderungskurve sind die beiden von HESS in seiner Arbeit ² veröffentlichten Kurvenäste in Fig. 6 eingezeichnet, wobei allerdings die Zuordnung der HESSschen Schrumpfungskurve zu unserem Koordinatensystem etwas willkürlich ist¹. Die Ergebnisse stimmen qualitativ überein. Ein quantitativer Vergleich der Gitteränderungen ergibt eine bei HESS um eine Größenordnung höhere Aufweitung. Berücksichtigt man noch, daß die HESSsche Kurve schon vor Erreichen des nach unseren Messungen ungefähr mit dem

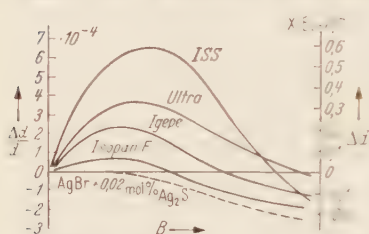


Fig. 7. Relative Gitteränderung $\Delta d/d$ als Funktion der Röntgenexposition B für Igepe-, Isopan-F-ISS- und ISS-Ultra-Film; - - - - - AgBr-Kristallen mit Ag₂S-Zusatz.

Schwärzungsmaximum zusammenfallenden Höchstwertes der Gitteraufweitung abbricht, so wird dieser Unterschied noch beträchtlich erhöht. Nach sehr starken Belichtungen tritt eine Kontraktion des zuvor geweiteten Gitters ein. Hier kann man mit großer Wahrscheinlichkeit auf die Ausscheidung von Ag-Kristallen schließen.

Die Übereinstimmung der Gitteränderung mit dem Verlauf der Schwärzungskurve legt eine Verknüpfung von latentem Bild und Gitteränderung nahe.

Auch bei Messungen an vier weiteren Agfa Emulsionen zeigt sich das bei LAT-E-Film gefundene Verhalten des Gitters (Fig. 7): Aufweitung beim Aufbau des latenten Bildes und Schrumpfung im Gebiet der Überbelichtung. Wie man aus Fig. 7 entnehmen kann, sind die Gitteränderungen bei empfindlichen Emulsionen (ISS- und Ultra-Film) am größten.

Außer handelsüblichen Filmen, deren genaue Zusammensetzung in der Regel unbekannt ist, wurden noch AgBr-Kristalle mit 0,02 Mol-% Ag₂S-Zusatz untersucht². Da verhältnismäßig wenig Substanz von diesen Kristallen zur Verfügung stand, konnte ein von seiner Emulsion befreites Filmband nur auf eine Länge von knapp 1 m durch Aufstreuen des Kristallpulvers als Präparatfilm für die DEBYE-Aufnahme vorbereitet werden. Die geringe Länge des Präparatfilms bedingt bei gegebener Belichtungszeit der DEBYE-Aufnahme eine im Vergleich zu den anderen Aufnahmen stark herabgesetzte Geschwindigkeit des Präparatfilms.

¹ Die Zuordnung der Aufweitungskurve ist mit Hilfe der im ansteigenden Bereich praktisch gleich verlaufenden Schwärzungskurven bei alter und neuer Emulsion gut möglich.

² Diese Kristalle sind so plastisch, daß sie nur durch Reiben auf einer feinen Feile gepulvert werden konnten.

Dadurch steigt die (normalerweise vernachlässigbar kleine) Röntgenbelichtung des Präparatfilms durch die Abtastung so erheblich, daß das Gebiet kleiner Vorbelichtungen gar nicht vermessen werden kann. Es ist durchaus möglich, daß das Aufweitungsgebiet ganz übersprungen und nur eine Gitterkontraktion gefunden wird. Die Meßreihe an den erwähnten AgBr-Kristallen ergibt, wie aus der gestrichelten Kurve in Fig. 7 zu ersehen, nur eine Abnahme der Gitterkonstante mit zunehmender Belichtung. Dies muß zweifellos in der hier auseinandergesetzten Weise verstanden werden, so daß kein Widerspruch zu den übrigen in diesem Abschnitt mitgeteilten Ergebnissen vorhanden ist. Es liegt nahe, auch die von BERRY ⁶ an stehendem Film gefundene Kontraktion mit zunehmender Röntgenbelichtung unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten.

6.2. Das Verhalten des AgBr-Gitters bei Einwirkung von sichtbarem Licht.

Das Verhalten des AgBr-Gitters wurde nun nach Einwirkung von sichtbarem Licht untersucht. Um den Einfluß der bei der Abtastung entstehenden kleinen Röntgenbelichtung nicht zu sehr anwachsen zu lassen, wodurch eine saubere Trennung zwischen Licht- und Röntgeneffekten unmöglich würde, wurde hier keine wiederholte Abtastung desselben Films vorgenommen. Abgesehen von dem erheblichen Filmverbrauch (etwa 100 m Film für jeden Meßpunkt) tritt bei diesem Vorgehen eine neue Fehlerquelle auf. Unter ungünstigen Verhältnissen können Schwankungen der Filmdicke eine von Aufnahme zu Aufnahme sich ändernde Verbreiterung der Rückstrahllinie ergeben, wodurch leicht eine kleine Gitteränderung vorgetäuscht würde. Bei den Untersuchungen mit Röntgenbelichtungen bestand diese Gefahr nicht, da hier ein und derselbe Film für die ganze Meßreihe verwendet wurde¹.

Eine Aufteilung des Al-Eichpulvers auf möglichst viele, über die ganze Filmlänge verteilte Stellen, bietet eine gewisse Möglichkeit, störende Dickenänderungen zu erkennen. Die Schärfe der Al-Linien kann dann als Maß für die Konstanz der Filmdicke betrachtet werden. Da bei verschiedenen Emulsionsnummern der gleichen Filmsorte gelegentlich ebenfalls auch kleine Unterschiede in der Gitterkonstante zu beobachten sind, dürfen nur Filme der gleichen Lieferung miteinander verglichen werden. Aus den Messungen ergibt sich qualitativ derselbe Verlauf der Gitteränderungen wie bei Röntgenbelichtung. In Fig. 8 sind die Gitteränderungskurven als Funktion der Lichtexposition für zwei Filmsorten wiedergegeben.

¹ Bei starken Schwankungen der Filmdicke würde die Meßgenauigkeit zwar herabgesetzt, weil die Linie verschmiert wird, eine Gitteränderung kann aber nicht vorgetäuscht werden, da der Einfluß auf allen Aufnahmen einer Serie derselbe ist.

Bei beiden Filmsorten liegt das Maximum der Gitteränderung ungefähr bei der Belichtung, die zur Erzielung der maximalen Schwärzung erforderlich ist. Da, wie schon mehrfach erwähnt, ISS- und Igepe-Film typische Vertreter für höchstempfindliche und extrem unempfindliche Emulsionen sind, ist es verständlich, daß die Maxima der beiden in Fig. 8 dargestellten Kurven bei verschiedenen Abszissenwerten liegen. Bei Röntgenbelichtung (vgl. Fig. 7 auf S. 256) treten nur geringe Unterschiede in der Lage dieser Maxima auf. Dies rührt daher, daß die Röntgenempfindlichkeit all dieser Emulsionen nahezu gleich ist.

Beim Vergleich der Fig. 7 und 8 fällt weiter auf, daß bei ISS-Film die durch Licht erzeugte Aufweitung um den Faktor 2 kleiner als bei Röntgenstrahlung ist. Ausgehend von der Vorstellung, daß die Bezirke

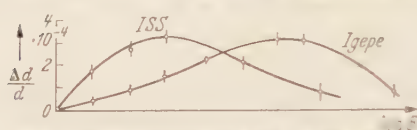


Fig. 8. Durch Lichtexposition bei ISS- und Igepe-Film hervorgerufene relative Gitteränderung $\Delta d/d$.

des latenten Bildes das sie umgebende Gitter verspannen, kann die verschieden große Aufweitung als Hinweis auf einen durch Röntgenstrahlen bewirkten Volumeneffekt im Gegensatz zu einem durch sichtbares Licht erzeugten

Oberflächeneffekt angesehen werden. Das durch Röntgenstrahlen im wesentlichen im Inneren des Kornes erzeugte latente Bild beeinflußt das umgebende Gitter stärker als die durch Licht nur an der Oberfläche des Kornes veränderten Gitterbereiche.

Bei Igepe-Film liegen allerdings die Verhältnisse umgekehrt. Die mit Licht erzeugten Gitteränderungen sind größer als die durch Röntgenstrahlen hervorgerufenen. Der Verdacht, daß hier die in 4.4 diskutierte Silberkoinzidenz auftritt, wodurch bei Igepe-Film eine Aufweitung vorgetäuscht würde, bestärkt sich nicht. Einmal wurde die benachbarte Ag Interferenz [334], die dann ebenfalls auftreten mußte, nicht beobachtet, zum andern hatte sich aber auch schon bei den Voruntersuchungen gezeigt, daß diese Emulsion überhaupt keine Neigung zur Ausbildung eines röntgenographisch erkennbaren Silbergitters zeigt. Abgesehen davon, daß bei derartigen Diapositivemulsionen mitunter recht unerwartete Erscheinungen auftreten, die nicht ohne weiteres verallgemeinert werden dürfen, spielt vielleicht hier die um eine Größenordnung kleinere Korngröße eine Rolle. Bei kleinen Körnern ist von vornherein ein stärkerer Einfluß des Oberflächenbildes zu erwarten.

Die Schrumpfung nach sehr starken Röntgenbelichtungen ist nach den vorliegenden Messungen (vgl. Fig. 7 und 8) stärker als nach Expositionen mit sichtbarem Licht. Auch hier handelt es sich vermutlich um einen durch Volum- und Oberflächeneffekte bedingten Unterschied.

7. Zusammenstellung und Diskussion der Ergebnisse.

Die wichtigsten Meßwerte der in Abschnitt 6 mitgeteilten Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Alle Messungen beziehen sich auf die Lage des Intensitätsmaximums der Beugungsringe. Diese Maxima verschieben sich mit zunehmender Vorbelichtung kontinuierlich. Auf die Linienmitte bezogene Messungen lassen in den meisten Fällen keine Gitteränderung erkennen. Da die Messungen sehr zeitraubend sind, wurden nur von den wichtigsten Punkten jeder Serie mehrere Aufnahmen gemacht¹. Diese hauptsächlich an unbelichtetem und zur maximalen Schwärzung vorbelichtetem Film ausgeführten Kontrollaufnahmen ergaben eine innerhalb der in Tabelle 1 angegebenen Auswertefehler liegende Reproduzierbarkeit der Messungen.

Tabelle 1. AgBr-Netzebenenabstand (020) in Å bei verschiedenen Vorbelichtungen sowie maximale relative Gitteraufweitung. (R = Exposition mit Röntgenstrahlen; L = Exposition mit Licht.)

Präparat	Igepe	LAUE	Isopan			AgBr+Ag ₂ S
			F	ISS	Ultra	
Unbelichtet	0,91022 ± 2	0,91080 ± 5	0,91420 ± 10	0,91192 ± 5	0,91212 ± 5	0,91115 ± 3
Zur maximalen Schwärzung belichtet	R 0,91043	0,91150	0,91427	0,91251	0,91245	—
	L 0,91051	—	0,91425	0,91222	0,91238	—
Letzter Meß- wert bei sehr hoher Belichtung	R 0,91011	0,91085	0,91403	0,91178	0,91210	0,91077
	L 0,91030	—	0,91410	0,91200	0,91172	0,91098
Maximale relative Gitteraufweitung × 10 ⁴ :						
R	2,3	7,5	0,8	6,6	3,7	—
L	3,2	—	0,5	3,3	2,9	—

Aus dem systematischen Gang der Gitterkonstante mit der Belichtung ergibt sich die Möglichkeit, die Entstehung des latenten Bildes durch Röntgenmessungen zu verfolgen. Während sich bisher das Augenmerk auf die „Zentren“ des latenten Bildes, also auf sehr kleine Einzelstellen im Gitter richtete, wobei das Gesamtgitter – von Leitfähigkeitsbetrachtungen abgesehen – außer acht gelassen wurde, beschreitet die Röntgenmethode gerade den umgekehrten Weg und stellt deshalb eine willkommene Ergänzung der bisherigen Betrachtungsweise dar. Die Röntgenmessungen geben Aufschluß über den Zustand ganzer Gitterbereiche. Die Zentren selbst können zunächst nur an ihren Auswirkungen

¹ Jede Aufnahme wurde mehrfach nach der in Abschnitt 5.4 beschriebenen Methode ausgemessen.

auf das umgebende Gitter erkannt werden, es sei denn sie wachsen zu solcher Größe, daß sie schließlich röntgenographisch erfaßbar werden¹ und sich identifizieren lassen².

Fast alle über die Entstehung des latenten Bildes aufgestellten Theorien lassen geringe Gitteränderungen wahrscheinlich erscheinen. Auch die heute in ihren großen Zügen allgemein anerkannte Theorie von GURNEY und MOTT läßt kleine Gitteränderungen durchaus erwarten. Dies gilt nicht nur für den Fall, daß sie nur auf (äußere und innere) Oberflächen anwendbar ist, sondern in verstärktem Maße, wenn sie auch, was sehr umstritten ist, für die Zentrenbildung in Innenbezirken des Gitters zutrifft. Denn gerade in diesem Fall würden durch das Zuwandern von Ag^+ -Ionen verhältnismäßig große Spannungen im Kristallgefüge entstehen, die eine Aufweitung des Gitters erwarten lassen. Die (vermeintliche) Härte dieser Vorstellung wird durch eine von MITCHELL [24] schon 1949 (also vor seinen S. 250 zitierten Einkristalluntersuchungen) aufgestellte Theorie vermieden, nach der das innere Bild aus F^- - bzw. $F^{\cdot-}$ -Zentren aufgebaut werden soll. Eine reine F^- -Zentrenbildung in vorher vorhandenen Anionenleerstellen muß zu einer Kontraktion des Gitters führen.

Die größten Gitteränderungen beim Aufbau des latenten Bildes heiße eine Theorie von HUGGINS [26] erwarten, die auf einer hypothetischen Strukturumwandlung des Kristallgitters aufgebaut ist.

Mit dieser kurzen Übersicht sollten die bei den wichtigsten Theorien zu erwartenden Gitteränderungen aufgezeigt werden.

Aus unseren Messungen ergibt sich ohne Hinzunahme anderweitig ermittelter Tatsachen folgendes Bild, das die Frage, wie man sich die Zentren vorzustellen hat, noch offen läßt:

Die bei der Entstehung des latenten Bildes beobachtete Gitteraufweitung kommt durch eine Art Mischkristallbildung zwischen Iongitter einerseits und den durch die Belichtung entstehenden Zentren andererseits zustande. Mit zunehmender Belichtung wächst die Konzentration der im Licht gebildeten Komponente bis Sättigung erreicht ist. Bei weiterer Belichtung setzen dann Ausscheidungsvorgänge ein. Sie beruhen auf einer (nach sehr starker Belichtung auch röntgenographisch beobachtbaren) Ausbildung eines Silbergitters in heterogener Phase. In diesem zweiten Teil des Prozesses nimmt die Gitterkonstante des AgBr -Gitters wieder ab.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. G. Joos möchte ich für die großzügige Förderung dieser von ihm angeregten Arbeit, für

¹ Dazu ist eine Ausdehnung über mindestens drei Netzebenen erforderlich.

² Dies ist nur möglich, wenn die von den Zentren zu erwartenden Beugungseffekte bekannt sind, was bei den neuerdings viel diskutierten Assoziaten aus Ionen, Lochern und Elektronen (vgl. z. B. [17]) durchaus nicht der Fall ist, vgl. auch [22], [23].

viele wertvolle Ratschläge und für das dem Fortgang der Messungen stets entgegengebrachte freundliche Interesse meinen wärmsten Dank sagen. Das für die Untersuchungen benötigte Filmmaterial wurde von der Agfa-Photofabrik Leverkusen zur Verfügung gestellt, wofür ich insbesondere den Herren Dipl.-Phys. F. WAGNER, Agfa-Camerawerk, München, und Herrn Direktor Dr. MILLER, Leverkusen, zu großem Dank verpflichtet bin.

Literatur.

- [1] KOCH, P. P., u. H. VÖGLER: *Ann. Physik* **77**, 495 (1925). — [2] HESS, B.: *Physik. Z.* **44**, 245 (1943). — [3] BRENTANO, J. O. M., and L. V. C. SPENCER: *J. Chem. Phys.* **17**, 944 (1949). — [4] BURGERS, W. G., u. E. A. MESRITZ: *Physica*, Haag **13**, 490 (1947). — [5] JUNGHANS, H., u. H. STAUBE: *Z. wiss. Photograph.* **48**, 194 (1953). — [6] BERRY, CH. R.: Vortrag auf der Konferenz der Royal photographic Society, London, Sept. 1953. — [7] STRAUMANIS, M., u. A. LEVINS: Die Präzisionsbestimmung der Gitterkonstanten nach der asymmetrischen Methode. Berlin 1940. — [8] GLOCKER, R.: Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. — [9] HALLA, F., u. H. MARK: Röntgenographische Untersuchung von Kristallen. Leipzig 1937. — [10] BIJVOET, J. M., N. H. KOLKMEIJER u. C. H. MAX GILLAVRY: Röntgenanalyse von Kristallen. Berlin 1940. — [11] BRANDENBERGER, E.: Röntgenographisch-analytische Chemie. Basel 1945. — [12] KOCHENDORFER, A.: *Z. Kristallogr.* **105**, 393 (1944). — [13] DEHLINGER, U.: *Z. Kristallogr.* **65**, 615 (1927). — [14] DEHLINGER, U.: *Z. Metallkde.* **23**, 147 (1931). — [15] ANGERER, E. v., u. G. JOOS: Wissenschaftliche Photographie. Leipzig 1952. — [16] MEES, K. C. E.: The theory of the photographic process. New York 1948. — [17] PICK, W.: *Naturwiss.* **38**, 32 (1951). — [18] WOLFF, W.: *Fortschr. chem. Forsch.* **2**, 375 (1952). — [19] GURNEY, W. R., and N. F. MOTT: *Proc. Roy. Soc. Amer. A* **164**, 151 (1938). — [20] HAMM, F. A., and J. J. COMER: *J. Appl. Phys.* **24**, 1495 (1953). — [21] HOERLIN, H., and F. A. HAMM: *J. Appl. Phys.* **24**, 1514 (1953). — [22] MILLER jr., P. H., and E. R. RUSSEL: *Phys. Rev.* **86**, 650 (1952). — [23] TELTOW, J.: *Ann. Physik* **12**, 111 (1953). — [24] MITCHELL, J. W.: *Phil. Mag.* **40**, 249 (1949). — [25] MENZER, G.: *Fortschr. Mineral. Kristallogr.* **16**, II, 162 (1932). — [26] HUGGINS, M. L.: *J. Chem. Phys.* **11**, 412 (1943). — [27] WAIDELICH, W.: *Naturwiss.* **41**, 210 (1954). — [28] WAIDELICH, W.: *Phys. Verh.* **5**, 106 (1954). — [29] HEDGES, J. M., and J. W. MITCHELL: *Phil. Mag.* **44**, 223, 357 (1953). — [30] KLEIN, E.: *Photogr. Korresp.* **90**, 52 (1954).

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Das elektrische Massenfilter.

Von

W. PAUL und M. RAETHER.

Mit 10 Figuren im Text.

(Eingegangen am 14. November 1954.)

In einer vorausgegangenen Abhandlung wurde von PAUL und STEINWEDEL¹ ein neues, rein elektrisch arbeitendes Massenfilter vorgeschlagen, das gegenüber den bisherigen Verfahren zur Bestimmung der spezifischen Ladung e/m von Ionen Vorteile zu haben verspricht. In der Zwischenzeit wurde das neue Verfahren experimentell geprüft und eine Bestätigung der Überlegungen gefunden.

A. Theoretischer Teil.

Die bisher verwendeten Massenspektrographen bzw. elektromagnetischen Isotopentrenner arbeiten nach folgendem Prinzip:

Durch Messung von zwei der drei Größen Impuls, Energie und Geschwindigkeit der Ionen wird durch Elimination der Geschwindigkeit e/m der Ionen bestimmt. Es findet dabei in der Regel eine räumliche oder zeitliche Trennung der Ionen verschiedener Masse statt. Der Impuls wird durch Ablenkung der Ionen in einem Magnetfeld gemessen, die Messung der Energie erfolgt durch Ablenkung oder Beschleunigung der Ionen in einem statischen elektrischen Feld. Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Laufzeit, die die Ionen benötigen, um eine vorgegebene geradlinige oder gekrümmte Strecke zu durchlaufen. Die Messung erfolgt mit hochfrequenztechnischen Mitteln. Doch werden dabei nur Ionen zur Messung benutzt, die jeweils während eines bestimmten kurzen Zeitintervalls starten (Impulsbetrieb) bzw. die bestimmten Phasenbeziehungen genügen.

Im vorliegenden Verfahren wird für die Messung von e/m von keiner der genannten Größen Gebrauch gemacht, sondern es wird die (zeitabhängige) Beschleunigung eines Ions in einem hochfrequenten elektrischen Feld gemessen und zur Auswertung der Massen benutzt. Die räumliche Verteilung des elektrischen Feldes ist dadurch gekennzeichnet, daß sein Potential $V(x, y, z, t)$ eine rein quadratische Funktion der Koordinaten x, y, z sein muß.

Sieht man von Drehungen und Verschiebungen des Koordinatensystems ab, so ist das allgemeinste derartige Potential gegeben durch

$$V(x, y, z, t) = f(t) (\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2). \quad (1)$$

¹ PAUL, W., u. H. STEINWEDEL: Z. Naturforsch. 8a, 448 (1953).

Dabei ist $f(t)$ eine beliebige periodische Funktion der Zeit; wegen der LAPLACE-Gleichung $\Delta V = 0$ müssen die Konstanten α , β und γ der Beziehung $\alpha + \beta + \gamma$ genügen.

Bringt man Ionen in ein derartiges Feld, so führen ihre Bewegungsgleichungen auf Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten (periodische Federkraft), die sich durch Bereiche von stabilen bzw. instabilen Lösungen auszeichnen. Es gibt also zwei verschiedene Arten von Ionenbahnen; entweder führen die Ionen um das Symmetriezentrum des Feldes Schwingungen aus, deren Amplituden einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten (stabile Bahnen), oder aber die Amplituden nehmen außerordentlich rasch zu, so daß die Teilchen in sehr kurzer Zeit auf die felderzeugenden Elektroden fliegen, also ausgeschieden werden (instabile Bahnen). Bei vorgegebenem Feld und Zeitabhängigkeit $f(t)$ hängt es allein von der spezifischen Ladung des Ions ab, ob es eine stabile oder instabile Bahn beschreibt. Die Stabilität oder Instabilität der Bahnen ist insbesondere unabhängig vom Anfangsort sowie Richtung bzw. Größe der Anfangsgeschwindigkeit der Ionen. Man wird da-

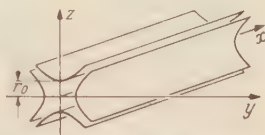


Fig. 1. Zur x -Achse symmetrisches Vierpolfeld mit hyperbolischen Elektroden.

durch weitgehend unabhängig von den Eigenschaften der Ionenquelle. *Liegt ein Ions in einem stabilen Bereich, so sind alle möglichen Bahnen stabil, liegt es in einem instabilen Bereich, so sind alle möglichen Bahnen instabil.* Die Theorie entspricht weitgehend derjenigen des Fokussierungsverfahrens mit alternierenden Feldgradienten beim Synchrotron, bei dem man jedoch solche Instabilitäten der Bahn vermeiden muß, die hier gerade ausgenutzt werden.

Ein spezieller Fall.

Für die folgende Untersuchung wurde eine Anordnung gewählt bei der in Gl. (1) $\alpha = 0$ ist, d. h., das Potential des verwendeten Feldes hat die Form

$$V(y, z, t) = c f(t) (y^2 - z^2).$$

Es wird realisiert durch ein zur x -Achse symmetrisches Vierpolfeld mit hyperbolischen Elektroden (Fig. 1). Wird der Abstand des Scheitels der Hyperbel von der x -Achse mit r_0 bezeichnet, und liegt an den Elektroden abwechselnd die Spannung U , so wird

$$V = \frac{U(t)}{r_0^2} (y^2 - z^2) \quad (2)$$

und die Feldstärke

$$E_y = + \frac{2U}{r_0^2} y; \quad E_z = - \frac{2U}{r_0^2} z.$$

Ist U eine Wechselspannung der Form $U = U_0 \cos \omega t$, so lauten die Bewegungsgleichungen eines Ions:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} - \frac{2eU_0}{r_0^2} \cdot y \cdot \cos \omega t &= 0 \\ m\ddot{z} + \frac{2eU_0}{r_0^2} \cdot z \cdot \cos \omega t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die erste Gleichung liefert $\dot{x} = \text{const.}$, d.h., das Ion fliegt in der x -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit. Die anderen beiden Gleichungen sind Spezialfälle der MATHIEUSCHEN Differentialgleichung, die in ihrer allgemeinen Form lautet¹:

$$\frac{d^2 z}{d\zeta^2} + (a - 2q \cos 2\zeta) z = 0. \quad (4)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung läßt sich darstellen durch:

$$z = A \cdot e^{\mu\zeta} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\zeta} + B e^{-\mu\zeta} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\zeta}.$$

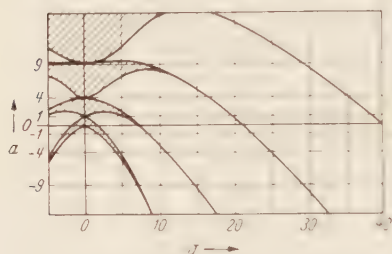


Fig. 2. Stabilitätsdiagramm der MATHIEU-Funktionen. Ionen, deren a - und q -Werte innerhalb der schraffierten Bereiche liegen, durchlaufen stabile Bahnen.

Man erkennt hieraus, daß es zwei Arten von Lösungen gibt. Ist der charakteristische Exponent μ , der aus a und q berechnet werden kann, imaginär, so bleibt die Lösung für alle ζ beschränkt. Ist dagegen μ reell oder komplex, so wächst die Amplitude exponentiell an, die Bahn ist instabil. Die Eigenschaft einer Lösung stabil oder instabil zu sein, hängt nur von der Größe der Parameter a und q ab. Sie ist unabhängig von den Anfangswerten ξ_0 und $\dot{\xi}_0$, wie in der Einleitung bereits gesagt. Trägt man die stabilen Bereiche in der a, q -Ebene auf, so erhält man Fig. 2. Die stabilen Bereiche sind schraffiert eingezeichnet. Aus dem Vergleich der Gln. (3) und (4) ergibt sich, daß in unserem Beispiel

$$a = 0 \quad \text{und} \quad q = \frac{4eU_0}{r_0^2 m \omega^2}, \quad (5)$$

$\zeta = \frac{\omega t}{2}$ ist. Die Ionen können sich also an irgend einem Punkt der q -Achse des Diagramms 2 befinden. In Fig. 2a ist die Umgebung der q -Achse herausgezeichnet. Die höheren Bereiche sind der Deutlichkeit halber übertrieben breit dargestellt. Von $q = 0$ bis $q = 0.92$ hält sich

¹ Siehe z.B. McLACHLAN, N.W.: Theory and Application of MATHIEU-Formations. Oxford 1947. — MEIXNER, J., u. SCHÄPFKE: MATHIEU-Funktionen. Berlin: Springer 1954.

das Ion in einem stabilen Bereich auf, von $q = 0,92$ bis $q = 7,50$ in einem instabilen, von $q = 7,50$ bis $q = 7,52$ wieder in einem stabilen usw.

Bei vorgegebener Wechselspannung und Frequenz hängt es nach Gl. (5) also nur von e/m ab, in welchem Bereich sich das Ion befindet. Für eine Wechselspannung von 1000 V sind die beiden ersten stabilen Bereiche in einem M, ν -Diagramm in Fig. 3 schraffiert aufgetragen (M = Massenzahl definiert durch $\frac{e}{m} = \frac{e}{m_0 \cdot M}$, ν = Frequenz). Man sieht



Fig. 2a. Schnittpunkte der stabilen Bereiche mit der q -Achse.

daraus folgendes: Ent-

hält ein Ionenstrahl verschiedene Massen, so werden im ersten Bereich bei vorgegebener Wechselspannung und Frequenz nur Massen oberhalb einer Masse $m = \frac{4 \cdot U_0}{0,002 \cdot r_0^2 \cdot \omega^2}$ durch das Feld hindurchgelassen. Im

zweiten Bereich wird nur noch ein endliches Massenintervall $\Delta m = \frac{\Delta q}{q} m$

durchgelassen. Da $\Delta q/q$ für den zweiten Bereich $\approx 1\%$ ist, sollte man erwarten, daß bei kleineren

Massen noch Isotope getrennt werden können. Störend wirkt dabei, daß dem 2. Bereich ein

Massenkontinuum im 1. Bereich überlagert ist. Vom 3. Bereich ab wird $\Delta q/q$ sehr klein, so daß

man eine sehr gute Auflösung erwarten sollte. Der Nachteil der Überlagerung ist natürlich

auch bei diesen höheren Bereichen vorhanden. Allerdings

sind sie aus Intensitätsgründen kaum zu verwenden. Wie sich aus den

Gln. (12) ergibt, dürften nämlich die Anfangsenergien der Ionen in y -

bzw. z -Richtung im 3. Bereich den Betrag von 10^{-6} eV nicht überschreiten.

Überlagert man der Wechselspannung eine Gleichspannung, wählt man also $U = U_g + U_0 \cos \omega t$, so ist es möglich, auch im ersten Bereich

nur ein kleines Massenintervall ΔM durchzulassen. Die Bewegungsgleichungen lauten nunmehr:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} - \frac{2e}{m r_0^2} (U_g + U_0 \cdot \cos \omega t) \cdot y &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{2e}{m r_0^2} (U_g + U_0 \cdot \cos \omega t) z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

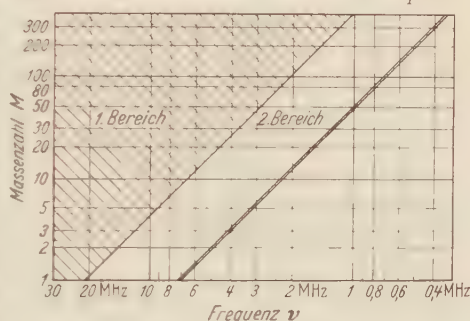


Fig. 3. Durchlaßbereiche des Massenfilters bei einer Wechselspannung $U_0 = 1000$ V, $r_0 = 0,5$ cm. Ionen deren Massenzahl im schraffierten Bereich liegt, können das Filter passieren.

Vergleicht man Gl. (6) mit Gl. (4) so ergibt sich nun

$$a_y = - \frac{8e U_g}{r_0^2 m \omega^2}; \quad a_z = + \frac{8e U_g}{r_0^2 m \omega^2}, \quad (7)$$

während $q = \frac{4U}{r_0^2 m \omega^2}$ in beiden Bewegungsrichtungen bleibt. Das Verhältnis $\frac{a}{q} = \pm 2 \frac{U}{U_0}$ hängt nur von Gleich- und Wechselspannung ab, nicht aber von Frequenz und Ionenmasse. Im a, q Diagramm sind die Kurven $u = \frac{U_g}{U_0} = \frac{a}{2q} = \text{const}$ Geraden, die vom Ursprung ausgehen und symmetrisch zur q -Achse liegen.

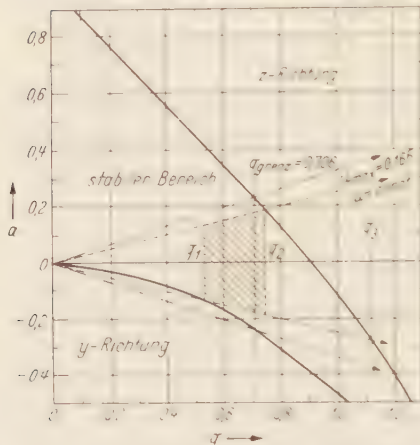


Fig. 4. Der erste Stabilitätsbereich. Vergrößerter Ausschnitt aus Fig. 2.

In Fig. 4 ist ein Ausschnitt aus dem 1. Stabilitätsbereich und ein Geradenpaar $u = \text{const}$ eingezeichnet. Die Halbebene $a < 0$ entspricht der y -Richtung, die Halbebene $a > 0$ der z -Richtung [vgl. (7)].

Denkt man sich Amplitude und Frequenz der Wechselspannung konstant gehalten, so liegen alle Massen auf den Geraden $u = \text{const}$. Dem Wert q_1 entspricht die Masse m_1 , $q_2 \hat{=} m_2$ und $q_3 \hat{=} m_3$. In einen stabilen Bereich fallen in der y -Richtung nur die Massen m_1 bis m_3 , in der z -Richtung nur die Massen oberhalb m_2 . Da ein Ion das Feld nur passieren kann, wenn es sowohl in der y -Richtung als auch in der z -Richtung stabil ist, wird also insgesamt nur ein Massenintervall $m = m_1 - m_2$ durchgelassen. Die Breite des Durchlaßbereichs in Abhängigkeit von der Gleichspannung erhält man aus den Schnittpunkten der Geraden $u = \text{const}$ mit den Grenzkurven des 1. Stabilitätsbereichs. Bei Erhöhung der Gleichspannung wird der Winkel zwischen den Geraden und der q -Achse größer und dadurch der Durchlaßbereich enger. Bei einem Verhältnis $U/U_0 = 0.166 = u_{\text{max}}$ ergibt sich im Grenzfall ein unendlich schmaler Bereich. Oberhalb u_{max} kann kein Ion das Feld passieren q nimmt in diesem Fall den Wert $q_{\text{grenz}} = 0.706$ an. Die Grenzkurven werden durch die Gleichungen

$$a = - \frac{q^2}{2} + \frac{7}{128} q^4 + O(q^6)$$

für die untere Grenzkurve bzw.

$$a = 1 - q - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{64} - \frac{1}{1536} q^4 + O(q^5)$$

für die obere Grenzkurve

(8)

dargestellt. In der Umgebung des Punktes $q = q_{\text{grenz}}$ ergibt sich

$$\Delta q = (0,236 - 1,410u) \left(\frac{1}{1,176 + 2u} + \frac{1}{0,629 - 2u} \right)$$

oder näherungsweise für einen sehr schmalen Bereich ($1q/q < 5\%$)

$$\Delta q \approx 4(0,236 - 1,410u).$$

Bei konstanten Feldgrößen entspricht dies einem Massenbereich

$$\Delta m = 4 \frac{m}{q} (0,236 - 1,410u).$$

Hieraus läßt sich das theoretische Massenauflösungsvermögen als Funktion der Größe u errechnen; es ist

$$\frac{m}{\Delta m} = \frac{1}{2} \frac{v}{\Delta v} = \frac{0,75}{1 - u/u_{\text{max}}}. \quad (9)$$

Die Frequenzbandbreite für eine Masse ergibt sich zu

$$\Delta v = \frac{v}{1,5} (1 - u/u_{\text{max}}). \quad (10)$$

Bei der Berechnung des Durchlaßbereiches wurde stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß das Feld in der x -Richtung unendlich lang ist, da nur für $t \rightarrow \infty$ die Amplituden der instabilen Ionenbahnen gegen ∞ streben. In der Praxis ist es hinreichend zu verlangen, daß die Ionen soviele Feldwechsel erleben, daß die Amplituden der instabilen Bahnen genügend stark anwachsen, um die Ionen auf die Elektroden auftreffen zu lassen. Man muß also die Feldlänge L nur so groß machen, daß die Verweilzeit der Ionen im Feld groß ist gegen die Dauer einer Hochfrequenzperiode. Diese ist $\tau = \frac{L}{v}$ wenn $v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m}}$ die Geschwindigkeit der Ionen und U_B die Beschleunigungsspannung ist. Dieser Ausdruck soll groß sein gegen $1/\nu$, also

$$L \gg r_0 \pi \sqrt{\frac{2U_B}{U_0}} q. \quad (11)$$

Für $L = 50$ cm, $r_0 = 0,5$ cm und $U_0 = 1000$ V ist die Anzahl der Feldwechsel gegeben durch $n = \frac{850}{\sqrt{U_B}}$. 100 V-Ionen erleben also 85 Feldwechsel, 1000 V-Ionen nur 25, ein Wert, bei dem es zweifelhaft ist, ob die Amplituden der falschen Massen bereits so stark angewachsen sind, daß sie nicht mehr auf den Auffänger treffen.

Damit die gewünschten Massen das Feld wirklich passieren können, ist es notwendig, daß ihre Amplituden in der y - und z -Richtung den Betrag r_0 nicht überschreiten. Diese Forderung bedeutet eine Einschränkung für die Anfangskoordinaten. Eine Berechnung der Amplituden aus

der MATHIEUSCHEN Differentialgleichung für die möglichen a, q -Werte innerhalb des stabilen Bereichs in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen y_0, z_0 und dem Einschubwinkel ist kompliziert und soll einer folgenden Untersuchung überlassen bleiben. Eine grobe Abschätzung für den maximalen Einschubwinkel bzw. die Energie der Bewegung in radialer Richtung wurde von PAUL und STEINWEDEL gegeben. Sie lautet:

$$\left. \begin{aligned} e U_y &< e(U_0 + U_g) e^{-\pi |2q + a|} \\ e U_z &< e(U_0 - U_g) e^{-\pi |2q - a|} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

B. Experimenteller Teil.

Für die praktische Durchführung wurde das Hyperbelfeld durch vier runde Messingstangen von $10 \pm 0,01$ mm \varnothing und 50 cm Länge in 10 mm Abstand approximiert, d.h. die Hyperbeln wurden durch ihre Krümmungskreise im Scheitel ersetzt (Fig. 5). Messungen im elektrolytischen Trog und eine rechnerische Abschätzung zeigten, daß diese Anordnung innerhalb eines Kreises mit dem Radius $2/3 r_0$ um den Nullpunkt mit hinreichender Genauigkeit das exakte Feld realisiert. Die Stäbe wurden in Messingscheiben mit Ergal als Isolationsmaterial gelagert. Ihre gegenseitige Lage konnte nachträglich nicht justiert werden. Das Stabsystem wurde beiderseitig durch gedrehte kreisförmige Blenden von 8 mm \varnothing gegen Ionenquelle und Aufnehmer abgeschirmt. In dieses Feld wurden Rubidiumionen aus einer Glüh-anode eingeschossen. Rubidium wurde gewählt, weil die beiden Isotope 85 und 87 zwei Masseneinheiten auseinander liegen und ein günstiges Mischungsverhältnis 2,67:1 haben.

Aus den Feldgrößen errechnet sich, daß bei einer Hochfrequenzamplitude von 1000 V und idealem Auflösungsvermögen, die Masse 85 bei einer Frequenz von 2,55 MHz liegt. Die Massen 4 bis 250 umfassen einen Frequenzbereich von 12 bis 1,5 MHz.

Die Hochfrequenzspannung wurde mit einem selbsterregten Gegen-taktsender erzeugt. Dabei mußte Sorge dafür getragen werden, daß die Hochfrequenzspannung über einen größeren Frequenzbereich konstant blieb. Dies wurde durch eine Rückwärtsregelung der Anodenspannung erreicht. Die so erreichte Konstanz betrug 0,01 % über einen

† Der Arbeit von PAUL und STEINWEDEL liegt die MATHIEUSCHE Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + (\lambda + q \cdot \cos 2z) = 0$$

zugrunde. V ist dort die *doppelte* Scheitelspannung.



Fig. 5. Querschnitt durch die verwendete Elektrodenanordnung.

Frequenzbereich von 200 kHz. Die geregelte Amplitude der Hochfrequenz konnte von 700 bis 1100 V Spitzenspannung variiert werden, die Frequenz von 2 bis 3 MHz bei einer Frequenzkonstanz von 1×10^{-4} nach halbstündiger Anlaufzeit. Die benötigte HF-Leistung betrug etwa 5 W.

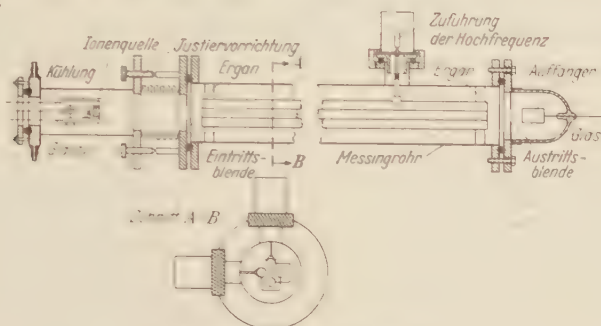


Fig. 6. Schnitt durch die Apparatur.

Das Stabsystem hatte eine Kapazität von etwa 60 pF; es wurde so angekoppelt, daß es als Zusatzkapazität im Schwingkreis lag. Die Gleichspannung wurde dem System über 2 HF-Drosseln symmetrisch gegen Erde zugeführt, sie konnte wahlweise einem besonderen Netzgerät oder durch Gleichrichtung dem Hochfrequenzgenerator entnommen werden. Letzteres hat den Vorteil, daß bei einer Variation der Hochfrequenzamplitude automatisch das Verhältnis U_g/U_0 konstant bleibt. Fig. 6 zeigt einen Querschnitt durch die Apparatur.

Meßergebnisse.

Gemessen wurde der Ionenstrom in einem am Ende des Feldes stehenden Auffänger in Abhängigkeit von Frequenz bzw. Amplitude der Wechselspannung und der Höhe der überlagerten Gleichspannung. Bei den in Fig. 7 gezeigten Messungen wurde die Amplitude konstant 925 V gehalten und die Frequenz variiert, mit wachsender Gleichspannung als Parameter. Die Einschlußspannung der Ionen betrug 110 V. Bei der dadurch gegebenen Geschwindigkeit erleben die Ionen etwa 75 HF-Perioden im Feld. In Fig. 7 ist als Abszisse die Frequenz aufgetragen, als Ordinate der Ionenstrom. Der Ionenstrom des Isotops 85 wurde in

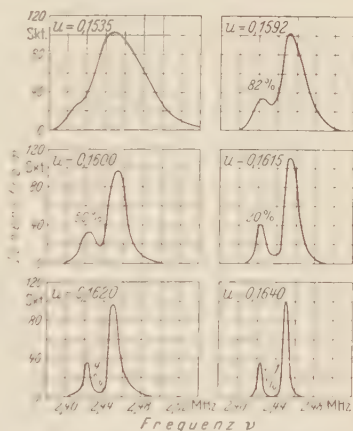


Fig. 7. Der im Auffänger gemessene Ionenstrom als Funktion der Frequenz der Wechselspannung. Parameter $u = U_g/U_0$.

allen Fällen $= 100$ gesetzt. Als Maß für das Auflösungsvermögen ist derjenige Bruchteil der Intensität von Rubidium 87 in % angegeben, der zwischen den Linien stehen bleibt. Bei $u = 0,164$ ist der Untergrund kleiner als 1%. Die Halbwertsbreite der Linien beträgt 5 kHz. Man erhält somit ein Auflösungsvermögen von $M \Delta M = 250$. Trägt man die gemessene Halbwertsbreite $\Delta \nu$ als Funktion von u auf, so erhält

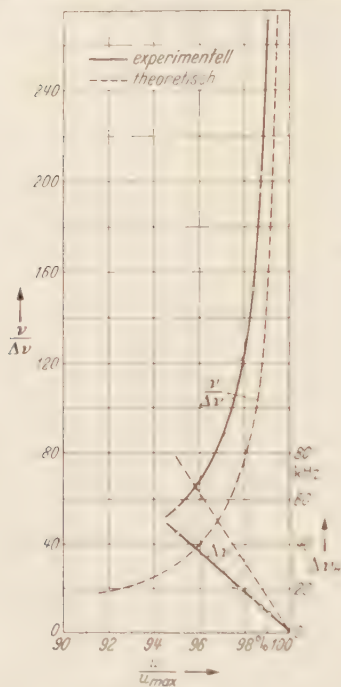


Fig. 8. Das Auflösungsvermögen bzw. Linienbreite als Funktion der überlagerten Gleichspannung. $u_{\max} = 100\%$. Gestrichelte Kurven gerechnet.

man eine Gerade, wie sie auch nach Gl. (10) zu erwarten ist (Fig. 8). Ebenso ergibt sich für das Auflösungsvermögen $\nu/\Delta \nu$ die nach Gl. (9) erwartete Abhängigkeit. Man sieht daraus, wie empfindlich das Auflösungsvermögen auf Änderungen der überlagerten Gleichspannung reagiert. Bemerkenswert ist, daß die theoretische Linienbreite fast doppelt so groß ist wie die gemessene Halbwertsbreite. Die eingezeichnete theoretische Breite ergibt sich aus der Annahme, daß

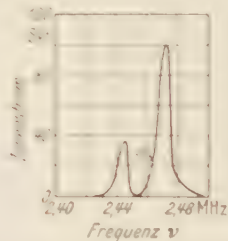


Fig. 9. Durchlassigkeitskurve des Massenfilters bei Beschleunigung der Ionen mit 220 V Wechselspannung.

jedes Ion, das im stabilen Bereich liegt, auch in den Auffänger gelangt, d.h. daß die Amplituden aller Teilchen kleiner r_0 bleiben. Dies ist jedoch nicht der Fall. Ionen die in der Nähe der Stabilitätsgrenze liegen, vollführen, wie eine eingehende Betrachtung zeigt, je nach der Anfangsphase im Feld sehr große Amplitudenschwörungen, so daß auch sie ausgeschieden werden. Dies führt zu einer scheinbaren Verengung des stabilen Bereiches und damit zu einer Vergrößerung des Auflösungsvermögens.

Das Mischungsverhältnis der Isotope 85 und 87 (2,67:1) wurde ohne besonderen meßtechnischen Aufwand mit einer Genauigkeit von 3% wiedergegeben.

Aus der Theorie ergibt sich, daß die Stabilitätseigenschaften der Lösungen nicht von den Anfangsbedingungen abhängen. Die Anfangsgeschwindigkeit darf also auf die Lage einer Massenlinie keinen Einfluß haben. Daß dies tatsächlich nicht der Fall ist, wird in treffender Weise durch Fig. 9 gezeigt. Bei der hier wiedergegebenen Messung wurden die Ionen mit 220 V Wechselspannung beschleunigt, sie hatten also Energien zwischen 0 und 310 eV. Trotzdem konnte ein gutes Auflösungsvermögen erreicht werden.

Einfluß der endlichen Feldlänge.

Wie oben ausgeführt, erleben die Ionen mit steigender Geschwindigkeit weniger HF-Perioden, so daß für die unerwünschten Massen am Ende des Feldes die Amplituden noch nicht genügend angewachsen sein können. Dies hat zur Folge, daß das Auflösungsvermögen oberhalb einer gewissen Geschwindigkeit abnimmt. Fig. 10 zeigt eine Durchlässigkeitskurve bei 100 und 1000 V Beschleunigungsspannung bei gleicher Bereichsbreite. Man sieht, daß 25 Schwingungen, die der Anfangsenergie von 1000 eV entsprechen, bereits ein schlechtes Auflösungsvermögen ergeben. Durch weiteres Einengen des Bereiches konnte jedoch auch bei großen Einschußspannungen das Auflösungsvermögen verbessert werden.

Bei den Messungen wurde gewöhnlich die Hochfrequenzspannung konstant gehalten und die Frequenz variiert. Prinzipiell kann man auch das umgekehrte Meßverfahren verwenden. Eine experimentelle Prüfung ergab die Richtigkeit dieser Überlegung.

Ionenstrom und Ausbeute.

Über den zu erwartenden Wirkungsgrad (nutzbarer Ionenstrom/eingeschossener Ionenstrom) in Abhängigkeit von Einschußspannung und Bereichsbreite theoretische Voraussagen zu machen, ist nicht ohne weiteres möglich. Experimentell ergab sich folgendes: Mit zunehmender Gleichspannung, also abnehmender Bereichsbreite, nimmt der Strom im Auffänger exponentiell ab. Bei $v/\Delta v = 500$ betrug der Wirkungsgrad 10^{-4} .

Begnügt man sich dagegen mit einem Auflösungsvermögen $v/\Delta v = 110$ was für eine Isotopentrennung unter Umständen hinreichend ist, so konnte ein Wirkungsgrad von 10% erreicht werden. Es wurde meist

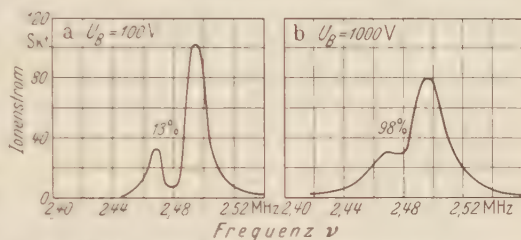


Fig. 10 a. b. Einfluß der Ionen­geschwindigkeit auf die Linienbreite. Beschleunigungsspannung a $U_B = 100 V$; b $U_B = 1000 V$. In beiden Fällen $u = 0,161$.

mit Ionenströmen von 10^{-6} Amp gemessen. Der Wirkungsgrad hängt wesentlich von der Transversalenergie der Ionen und der Feldjustierung ab. Er kann sicher verbessert werden.

Fehlereinflüsse.

Im wesentlichen treten zwei Effekte auf, die die Wirkungsweise des Massenfilters störend beeinflussen, nämlich Feldfehler und Aufladungen der Elektroden.

Hat das Feld nicht genau das Potential $V \sim (v^2 - z^2)$, so gibt dies zu nichtlinearen Gliedern in der MATHIEUSchen Differentialgleichung Veranlassung, die die Stabilitätsgrenzen beeinflussen. Feldfehler dieser Art traten auf bei schlechter Justierung der Stäbe und bei Verwendung eines Feldes mit hyperbolisch gefrasten Elektroden, die mechanisch nicht genau genug hergestellt waren. Dies hatte zur Folge, daß die Massenzonen doppelt und dreifach wurden, also instabile Gebiete innerhalb des stabilen Bereichs auftraten. Diese interessanten Erscheinungen werden weiter untersucht.

Ist die Hochfrequenzspannung nicht rein sinusförmig, d. h. sind Oberwellen vorhanden, so ist in der MATHIEU-Gleichung $\cos 2z$ durch die FOURIER-Zerlegung der Spannung zu ersetzen. Dies hat jedoch nur sehr geringen Einfluß. Verwendet man beispielsweise statt der Sinusspannung eine Rechteckspannung, so bewirkt dies nur eine etwas andere Lage der stabilen Bereiche. Der Schnittpunkt der Begrenzungskurve des ersten Stabilitätsbereichs mit der q -Achse verschiebt sich z. B. in diesem Fall um etwa 20%. Für die prinzipielle Wirkungsweise des Massenfilters ist dies natürlich völlig unerheblich. Anders verhalten sich dagegen Subharmonische. Sie geben Veranlassung zu Instabilitäten innerhalb der stabilen Bereiche. Es besteht durchaus die Möglichkeit, diese „Stoppbänder“ wie sie in der Theorie des stark fokussierenden Synchrotrons genannt werden, für die Massentrennung auszunutzen.

Selbst bei idealem Feld wird das theoretisch mögliche Auflösungsvermögen [Gl. (9)] in der Praxis begrenzt durch die Fehler in der Amplitude und Frequenz der Hochfrequenzspannung. Es gilt

$$\frac{m}{\Delta m} = \frac{1}{\frac{\Delta q}{q} + 2 \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta U_0}{U_0}}.$$

Es liegt in der Natur des hier beschriebenen Filters, daß ständig ein verhältnismäßig großer Ionenstrom auf die Elektroden trifft. Bilden sich auf den Elektroden isolierende Schichten, was je nach dem verwendeten Material mehr oder weniger der Fall ist, so kann die auftretende Ladung nicht schnell genug abfließen. In leichteren Fällen wirkt

sich dies wie eine zusätzliche Gleichspannung aus, die den Bereich je nach der Größe des Ionenstroms mehr oder weniger zusperrt. Diese Erscheinung bewirkt eine Fälschung des Häufigkeitsverhältnisses der Isotope. Sie wurde besonders an Elektroden aus Messing beobachtet. Durch vernickelte Elektroden gelang es, diesen Effekt weitgehend herabzudrücken. Starke Aufladungen führen zu erheblichen Feldverzerrungen. Diese geben, ähnlich wie mechanische Feldfehler, Veranlassung zu Doppel- und Dreifachlinien. Durch gelegentliches Reinigen des Systems ließen sich solche nichtleitenden Schichten beseitigen.

Raumladungseinflüsse wurden bei den verwendeten geringen Ionenströmen nicht beobachtet.

Wir danken dem Wirtschaftsministerium des Landes Nordrhein-Westfalen für die Unterstützung dieser Untersuchungen.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität.

Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung.

I. Grundlagen und Grenzen kollektiver Beschreibung.

Von

G. ECKER.

(Eingegangen am 29. November 1954.)

Die Beschreibung der Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung wird einer kritischen Betrachtung unterzogen. Es zeigt sich, daß insbesondere die umfangreichen Untersuchungen der jüngeren Vergangenheit zu weitgehendem Verständnis dieses Problems geführt haben. Allerdings stößt man darüber hinaus auf gewisse Schwierigkeiten und Diskrepanzen, deren Charakter die Vermutung nahelegt, daß sie durch Überlastung der verwendeten Modellvorstellungen bedingt sind. Vor allem scheint es wichtig, der Beschränkung kollektiver Beschreibung durch die „individuellen Teilchenaspekte“ größere Beachtung zu schenken. Das Modell der „dispergierten Trägergesamtheit“ (D-Modell), wie es ursprünglich nur zur Realisierung der VLASOVschen Näherung eingeführt wurde, erweist sich insofern von allgemeinerer Bedeutung, als es auch die Basis der statistischen Dynamik bildet. Die Formulierung der Teilchenbilanz im Phasenraum und der inneren Wechselwirkung des Ensembles erlaubt zwei Systeme von Bedingungsgleichungen anzugeben, welche die Verwendung des D-Modelles hinsichtlich der Berechnung der Trägerkinetik und -wechselwirkung beschränken. Die Interpretation dieser Forderungen ermöglicht eine Erweiterung und Vertiefung des Begriffes der individuellen und kollektiven Teilchenkomponenten. In einer folgenden Untersuchung werden wir die hier gewonnenen allgemeinen Ergebnisse zur Klärung der in der Einleitung beschriebenen Diskrepanzen und Schwierigkeiten auswerten.

Einleitung.

In der Gaselektronik, der Astrophysik, sowie in der modernen Rehlentechnik besteht hervorragendes Interesse an der Kenntnis des dynamischen Verhaltens der Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung. Die Benennung „kollektive Wechselwirkung“ wurde von VLASOV ^{1, 2} geprägt, um solche statistischen Systeme auszuzeichnen, deren einzelne Individuen infolge langreichweitiger Zwischenkräfte mit vielen oder sogar allen Trägern der Gesamtheit gleichzeitig in dauernder Wechselwirkung stehen. Dies bedeutet einen wesentlichen Unterschied gegenüber den gewöhnlichen statistischen Gesamtheiten mit kurzreichweitigen Zwischenkräften, deren Träger sich abgesehen von gelegentlichen Zusammenstößen praktisch unabhängig voneinander bewegen. Der besondere Charakter der integralen Wechselwirkung bedingt die Verwendung neuartiger Näherungen ¹ bis ⁵ und ermöglicht es den entsprechenden Systemen, Eigenschaften zu entwickeln, die den üblichen statistischen Gesamtheiten fremd sind.

Die weitaus wichtigsten Vertreter der Systeme mit kollektiver Wechselwirkung sind die Elektron-Ion-Gesamtheiten, deren experimentelle Kenntnis seit den ersten Untersuchungen von PENNING [6] und LANGMUIR-TONKS [7] in zahlreichen Arbeiten erweitert worden ist, von denen wir hier nur einige anführen können [6] bis [15].

Versuche zur theoretischen Erfassung der experimentellen Ergebnisse wurden bereits in den Jahren 1925 bis 1940 unternommen [7], [16], [17], [18]. Trotz relativ primitiver Modellvorstellungen ergaben sich schon bei diesen Rechnungen größenordnungsmäßig und qualitativ richtige Resultate. Die Basis zu tieferem theoretischen Verständnis hat jedoch VLASOV mit der Diskussion des Begriffs der „kollektiven Wechselwirkung“ in seinen Arbeiten aus den Jahren 1938 und 1945 geschaffen [1, 2]. Seit dieser Zeit sind dann eine große Zahl von Publikationen erschienen, die wir nach ihrer experimentellen Ausrichtung zweckmäßig in zwei Gruppen (A, B) einteilen. Die eine Gruppe (A) behandelt eine endliche Zahl von Trägerströmen scharf begrenzter Geschwindigkeit [12] bis [27]. Diese Anordnung ist von Interesse für die Probleme der Röhrentechnik. Die zweite Gruppe (B) untersucht im Hinblick auf die Probleme der Gaselektronik und Astrophysik eine Gesamtheit in thermisch ungeordneter Bewegung mit oder ohne überlagerte Stromkomponenten [1] bis [5], [16], [18], [27] bis [40]. Unter den Arbeiten dieser letzten Gruppe dürfen die Untersuchungen von BOHM und PINES besondere Aufmerksamkeit beanspruchen, da sie wesentlich zur begrifflichen Klarstellung der Basis kollektiver Beschreibung beitragen.

Die hier skizzierten Ergebnisse haben das Verständnis unzweifelhaft erheblich vertieft. Trotzdem ist unsere Kenntnis nicht befriedigend. Dies hat seine Ursache nicht einmal so sehr darin, daß alle Berechnungen mit den wenigen Ausnahmen [24], [30] und [19], [27], [30] gezwungen sind, sich auf lineare Störungen zu beschränken und den Einfluß der Randgebiete zu vernachlässigen. Vielmehr ist der Mangel darin zu sehen, daß die Ergebnisse zum Teil gewisse Schwierigkeiten aufweisen und insbesondere zwischen den Resultaten verschiedenartiger Untersuchungen wesentliche Diskrepanzen bestehen. Auch werden sich die grundlegenden Begriffe der „individuellen und kollektiven Teilchenkomponenten“, wie sie in [3], [4], [5] diskutiert sind, als ergänzungsbedürftig erweisen.

Etwas genauer läßt sich die augenblickliche Situation folgendermaßen beschreiben:

Die Basis fast aller Berechnungen bilden die Gesetzmäßigkeiten der statistischen Dynamik, MAXWELLS elektrodynamische Gleichungen und zur Formulierung der kollektiven Trägerwechselwirkung die VLASOVsche Näherung der „verschmierten Ladung“, mit deren Bedeutung wir uns

im folgenden noch ausführlich beschäftigen müssen. Auf dieser Basis führen alle linearen Untersuchungen vom Typ (A) unter Verwendung der FOURIER-Zerlegung zu dem Dispersionsgesetz

$$1 = \sum_s \frac{\omega_{s0}^2}{\{\omega + (\mathbf{f} \mathbf{v}_{s0})\}^2}, \quad (1)$$

wo in bekannter Weise $\omega_{s0}^2 = 4\pi \varrho_{s0} \cdot e^2/m$ die LANGMUIR-Frequenz, ϱ_{s0} bzw. v_{s0} mittlere Dichte und Geschwindigkeit des s -ten Elektronenstromes im Ausgangszustand und ω bzw. \mathbf{f} Kreisfrequenz und Ausbreitungsvektor bezeichnen. Mit diesem Gesetz läßt sich das raumzeitliche Verhalten der Gesamtheit in wohlbekannter Weise durch Integralausdrücke formulieren, deren Spektralfunktionen durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Auf Grund dieser Überlegungen können wir die lineare Näherung der Problemstellung (A) zum mindesten prinzipiell als gelöst ansehen.

Zu der weit schwierigeren nichtlinearen Behandlung des gleichen Problems liegt nur ein Versuch vor [24]. Wir werden jedoch später zeigen, daß die entsprechenden Ergebnisse nicht voll befriedigend sein können, da in den Transportgleichungen wesentliche Glieder unberücksichtigt geblieben sind.

Die Untersuchungen der Anordnungen (B) berechnen unter Verwendung der FOURIER-Analysis die folgenden drei verschiedenen Dispersionsgesetze:

$$1 = \frac{4\pi e^2}{k \cdot m} \int \frac{\partial f_0}{\partial c_k} \frac{dV_c}{\{\omega + (\mathbf{f} \mathbf{c})\}}, \quad (2a)$$

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m} \int f_0 \frac{dV_c}{\{\omega + (\mathbf{f} \mathbf{c})\}^2}, \quad (2b)$$

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m} \int f_0 \frac{dV_c}{\{\omega^2 - (\mathbf{f} \mathbf{c})^2\}}, \quad (2c)$$

wo \mathbf{c} die Tragergeschwindigkeit, $f_0(\mathbf{c})$ die Verteilungsfunktion dieser Geschwindigkeit im Ausgangszustand und dV_c das Volumenelement des Geschwindigkeitsraumes bezeichnet. Um der Klarheit willen sind die Beziehungen (2) unter Vernachlässigung aller für den gegenwärtigen Zweck unwesentlichen Erscheinungen in der einfachsten Form geschrieben. Die Gln. (2a), (2b) und (2c) ergeben sich, je nachdem ob man die Fundamentalgleichung von BOLTZMANN [1], [2], [28] bis [40], die LORENTZ Gleichung und den Tragererhaltungssatz [20], [27] bis [31] oder aber die MAXWELLSchen „hydrodynamischen Transportgleichungen“ [18], [33] bis [37] als Grundgesetz der statistischen Dynamik verwendet.

Die Aussagen der Formeln (2a), (2b) und (2c) sind wesentlich verschieden

und lassen sich nicht identisch ineinander überführen. Da sie den gleichen physikalischen Sachverhalt beschreiben, müssen sie mindestens teilweise in ihrem Anwendungsbereich beschränkt, wenn nicht gar ungültig sein.

Darüber hinaus ist von LANDAU und TWISS [38], [27] mit Recht kritisiert worden, daß das Integral in (2a) eine Divergenzstelle enthält. Wie wir sehen, gilt derselbe Einwand auch für die Gl. (2b), wo die Singularität des Integranden sogar von höherer Ordnung ist. Dies hat zur Folge, daß der allgemeine CAUCHYSche Integralwert und damit die Aussage des Dispersionsgesetzes für bestimmte Parameterwerte (f) durch (2a) und (2b) überhaupt nicht definiert ist. Bei der Auswertung der Beziehung (2a) konnte diese Schwierigkeit scheinbar vermieden werden, indem man an Stelle des allgemeinen Integralbegriffes den CAUCHYSchen Hauptwert verwendete [2]. Dies bedeutet jedoch eine willkürliche Beschränkung der Allgemeinheit. Außerdem liefert im Fall der Gl. (2b) auch CAUCHYS Hauptwert kein definiertes Ergebnis mehr, da der Grenzwert hier unter allen Umständen divergiert.

Die genannten Schwierigkeiten haben einige Autoren [30] vermieden, indem sie einen gewissen Bereich in der Umgebung der Singularität von der Integration ausschlossen, mit dem Hinweis, daß in dieser Zone die Voraussetzung der linearen Näherung zusammenbricht. Diese Argumentation ist an sich berechtigt, führt jedoch in der quantitativen Anwendung zu wenig befriedigenden Aussagen. Lassen wir nämlich die Amplitude einer beliebigen vorgegebenen Störung abnehmen, so müßten wir schließen, daß das raum-zeitliche Verhalten dabei völlig verändert wird, indem der Verlauf des Vorganges mit sinkender Amplitude schließlich nur noch von einem winzigen Bruchteil aller Träger an der Grenze der Ausschlußzone bestimmt wird. Oder betrachten wir die Beschränkung des kollektiven Verhaltens, wie sie a. a. O. [30] bestimmt wird. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die aus der Linearität definierte Ausschlußzone mit abnehmender Amplitude zusammenschrumpft, müßten wir folgern, daß im Widerspruch zu den Ergebnissen andersartiger Überlegungen kollektive Bewegung auch für Vorgänge mit einer charakteristischen Länge (Wellenlänge) beliebig kleiner als die DEBYE-Länge möglich sei, sofern wir nur die Amplitude hinreichend klein wählen. Der Grund für diese offensichtlich unbefriedigenden Folgerungen liegt in der Tatsache, daß die Beschränkung der linearen Näherung zwar eine notwendige, keineswegs aber eine hinreichende Begrenzung der Ausschlußzone liefert. Wir werden vielmehr im folgenden eine weit allgemeinere und grundsätzlichere Bedingung kennenlernen, die von der Amplitude unabhängig ist und die merkwürdigen Konsequenzen, wie sie sich aus der Bedingung der Linearität ergeben, vermeidet.

Andere Autoren [27], [38] dagegen haben aus den eingangs geschilderten Schwierigkeiten und Diskrepanzen der Dispersionsgesetze den

Schluß gezogen, daß die Anwendung der Substitutionsanalyse zur Beschreibung von Systemen mit kontinuierlicher Geschwindigkeitsverteilung überhaupt nicht möglich sei. Sie erzielen unter Verwendung der LAPLACE-Transformation Ergebnisse, die sich ihrerseits wiederum von den angeführten unvereinbaren Resultaten der Substitutionsmethode wesentlich unterscheiden [27], [38].

Allgemeine Ansätze zu einer nichtlinearen Beschreibung der Anordnungen vom Typ (B) liegen nicht vor. Allerdings ist kürzlich mit dem Begriff der sog. „trapped-electrons“ ein nichtlinearer Gesichtspunkt von hervorragender Bedeutung aufgezeigt worden [3], [4]. Die quantitative Formulierung ist jedoch nur unter stark vereinfachenden Annahmen, und auch dann nur für den schwer realisierbaren Fall einer unbegrenzten trigonometrischen Welle gelungen¹.

Beschäftigen wir uns mit der hier skizzierten Situation genauer, so wird man zu der Vermutung geführt, daß die Ursachen der Diskrepanzen und Schwierigkeiten zum mindesten teilweise in einer Überlastung der verwendeten Modellvorstellung zu suchen sind. Wir diskutieren daher zunächst in dieser Arbeit die Frage, welche Modellvorstellungen den Untersuchungen zugrunde liegen und wie sich die Grenzen der Anwendbarkeit dieser Modelle allgemein formulieren lassen. In der folgenden Arbeit sollen dann die allgemeinen Ergebnisse ausgewertet werden. Dabei wird es sich vor allem zeigen, daß die Begriffe der „individuellen und kollektiven Teilchenkomponenten“, wie sie von BOHM und PETERS [3], [4], [5] aus ihrer zwar mathematisch eleganten, dafür aber weniger durchsichtigen Formulierung abgelesen werden konnten, einer erheblichen Erweiterung und Vertiefung fähig sind. Die Berücksichtigung dieser Kenntnis zusammen mit einer Kritik der in die statistischen Bewegungsgleichungen eingehenden Näherungen erlaubt die beschriebenen Schwierigkeiten und Diskrepanzen zu beseitigen und führt zu einer weitgehenden Klärung der Situation.

Das D-Modell als gemeinsame Basis

der statistischen Bewegungsgleichungen und der VLASOVschen Näherung.

Die große Zahl der Freiheitsgrade der Anordnungen (A, B) verlangt die Anwendung statistischer Beschreibungsmethoden, deren Formulierung in zwei Teile zerfällt:

¹ Die Behandlung stehender Wellen durch Superposition fortschreitender Wellen, wie sie a. a. O. vorgeschlagen wird, ist nicht möglich, da die Begründung in [30] unberechtigt voraussetzt, daß sich die nichtlinearen Einflüsse der beiden Partialwellen einfach superponieren. In Wirklichkeit ist für die nichtlinearen Effekte bei der stehenden Welle eine Elektronengruppe verantwortlich, die mit keiner der zu den Teilwellen gehörigen nichtlinearen Gruppen identisch ist. Auch die a. a. O. durchgeführten Berechnungen für den interessanten Fall eines „traveling pulse“ sind nicht kompetent, da sie Rechenfehler enthalten (Lösung der Differentialgleichung (49), a. a. O.).

Die Bestimmung des Kraftfeldes einschließlich der inneren Wechselwirkung als Funktion der Randbedingungen und der Zustandsvariablen einerseits, und die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit von diesem Kraftfeld andererseits.

Dem zweiten Teil dieser Aufgabe widmet man im allgemeinen keine besondere Aufmerksamkeit, sondern sieht in der BOLTZMANNschen Fundamentalgleichung oder äquivalenten Umformungen eine für alle Zwecke ausreichende Niederschrift der Bewegungsgesetze. Auf Schwierigkeiten stößt dagegen häufig die Formulierung der Trägerwechselwirkung. Für den Fall der kurzreichweitigen Zwischenkräfte, bei denen die Wechselwirkung als Zweierstoß beschrieben werden kann, ist die Behandlung dieses Problems durch die bekannten Verfahren von CHAPMAN und ENSKOG weitergetrieben worden.

Im Fall der langreichweitigen Zwischenkräfte dagegen hat VLASOV [1], [2] mit seinem Vorschlag der kollektiven Beschreibung eine brauchbare Basis geschaffen. Seine Methode geht von der Annahme aus, daß bei Individuen mit langreichweitigen Zwischenkräften die Wechselwirkung in guter Näherung formuliert werden kann, wenn wir Stoßvorgänge völlig vernachlässigen. Dagegen soll der kollektive Wechselwirkungsanteil aus der Ladungsverteilung berechnet werden, wie sie sich ergibt, wenn wir uns die diskrete Ladung der einzelnen Träger über den Raum „ausgeschmiert“ vorstellen. Diese Modellvorstellung werden wir im weiteren als „VLASOVsche Näherung“ bezeichnen. Wenn wir wollen, können wir uns dieses Modell der „verschmierten Ladung“ verwirklicht denken, indem wir jeden Träger unter Konstanthaltung der spezifischen Ladung unendlich fein dispergieren und über seine Umgebung bis zum Anschluß an die benachbarten Träger verteilen. Diese Vorstellung der dispergierten Gesamtheit ist bereits anderweitig [27] zur Realisierung der VLASOVschen Näherung vorgeschlagen worden. Ihre Bedeutung reicht jedoch, wie wir noch genauer ausführen werden, weit über den Anwendungsbereich der VLASOVschen Näherung hinaus und in dieser allgemeineren Sicht wollen wir die Modellvorstellung der dispergierten Trägersamtheit im folgenden als Dispersionsmodell (D-Modell) kennzeichnen.

Die Anwendung dieses D-Modelles zur Bestimmung der integralen Wechselwirkung (VLASOV-Näherung) ist augenfällig, da sie bei der Behandlung der Systeme mit kollektiver Wechselwirkung neu eingeführt wird, während für die Gesamtheiten mit kurzreichweitigen Zwischenkräften die innere Wechselwirkung auf der Basis des Zweierstoßes völlig andersartig formuliert werden muß.

Die Bedeutung des D-Modelles ist jedoch, wie bereits angedeutet wurde, keineswegs auf diese augenfällige Anwendung beschränkt. Im Gegenteil, — ob kollektive oder nichtkollektive Gesamtheit —, das

Dispersionsmodell ist in dem zweiten Teil der beschriebenen dynamischen Aufgabe, bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen, bereits in allgemeinerer Form bezüglich des gesamten Phasenraumes vorausgesetzt. Allerdings macht man sich dies nicht immer ausdrücklich klar, da bei den üblichen statistischen Betrachtungen der Unterschied zwischen Modell und wirklichem Ensemble nicht ins Gewicht fällt.

Wir werden jetzt diese Behauptung bezüglich des Anwendungsbereiches des D-Modelles verifizieren und gleichzeitig die Grenzen der Anwendbarkeit des Modelles sowohl in bezug auf die dynamischen Grundgleichungen, als auch in bezug auf die Berechnung der inneren Wechselwirkung formulieren.

Dazu verfolgen wir zunächst kurz die Überlegungen, die von der determinierten zu der statistischen Beschreibung führen. Die bestmögliche Kenntnis würde eine Angabe vermitteln, die zu jedem Zeitpunkt den Zustand der Trägergesamtheit durch N -Punkte im Phasenraum kennzeichnet, die den N -Individuen des Systems zugeordnet sind. Diese Punkte würden mit der Zeit im Phasenraum bestimmte Kurven beschreiben, die das raum-zeitliche Verhalten des Systems vollständig charakterisieren. Es ist klar, daß die Berechnung dieser Bahnen des N -Körpersystems ein undiskutables mathematisches Problem ist, ganz abgesehen von der Unmöglichkeit, die zugehörigen Anfangsbedingungen mit ausreichender Genauigkeit zu realisieren oder zu messen. Eine so detaillierte Kenntnis erscheint aber auch deswegen kaum wünschenswert, da sie Ergebnisse liefern würde, die der Prüfung grundsätzlich nicht zugänglich wären.

Es liegt daher nahe, statt der Koordinaten jedes einzelnen Individuums im Phasenraum (determinierte Beschreibung) allgemeinere Zustandsvariablen zu verwenden, die eine einfachere mathematische Formulierung ermöglichen. Zwei gegenläufige Gesichtspunkte sind für die Auswahl dieser Variablen wesentlich. Sie sollten einerseits unspezifisch gewählt werden, um den mathematischen Aufwand so weit wie möglich zu reduzieren und die Zustandsvariablen den experimentellen Beobachtungsgrößen anzupassen. Andererseits allerdings mußten sie noch so spezifisch sein, daß sie den Zustand des Systems mit ausreichender Genauigkeit zu kennzeichnen erlauben und vor allen Dingen noch bestimmt genug sind, um die Formulierung der Kinetik und Dynamik des Systems zu gestatten. Dieser letzte Punkt ist besonders wesentlich. Er bedeutet mit anderen Worten — derjenige Teil der idealen determinierten Kenntnis, den wir beim Übergang zu den allgemeineren Zustandsvariablen aufgeben haben, darf auf die Formulierung der Gesetzmäßigkeiten keinen Einfluß ausüben.

Die Experimente erlauben uns Aussagen über die Trägerdichte in den einzelnen Bereichen des Phasenraumes zu gewinnen. Es ist daher

naheliegend, den Zustand der Gesamtheit durch eine mittlere Dichtefunktion $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$ im gleichen Raum zu beschreiben, wenn t die Zeit, \mathbf{r} die räumliche, \mathbf{c} die Geschwindigkeitskoordinate und \mathbf{p} den Impuls bezeichnet. Auf diese Form der Beschreibung lassen sich andere Methoden, beispielsweise die der MAXWELLSchen Transportgleichungen zurückführen. Zur Berechnung der Verteilungsfunktion f wird bekanntlich die BOLTZMANNsche Fundamentalgleichung

$$\mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial_{\mathbf{K}} f}{\partial t} \quad (3)$$

verwendet, in der das Glied $\partial_{\mathbf{K}} f / \partial t$ den Stoßvorgängen Rechnung trägt und $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} / m$ das äußere Kraftfeld kennzeichnet. Die Gl. (3) formuliert die Teilchenbilanz im Phasenraum. Wir betrachten diese Bilanz, um zu erkennen an welche Voraussetzungen die Gültigkeit der Beziehung (3) geknüpft ist.

Beginnen wir mit einem Blick auf die Definition der Dichtefunktion f . Die Dichte s einer beliebigen kontinuierlichen Eigenschaft u definieren wir üblicherweise als den Grenzwert

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{dV} \cdot u(dV) \right\} = s, \quad (4)$$

wo $u(dV)$ den Gesamtwert von u innerhalb eines den Aufpunkt einschließenden Volumens dV bezeichnet. Wesentliche Voraussetzung ist dabei, daß ein solcher Grenzwert überhaupt existiert und insbesondere von der Art des Grenzüberganges (der Form des Volumenelementes) unabhängig sei.

Wie CHAPMAN und COWLING ⁴¹ bereits bemerkt haben, bricht diese Definition bei der Übertragung auf ein endliches Teilchenensemble im Phasenraum zusammen, da mit $d\tau = m^3 dV_c dV_r \rightarrow 0$ (dV_c, dV_r Volumenelemente des Geschwindigkeitsraumes bzw. des geometrischen Raumes) die Funktion f keinem bestimmten Grenzwert zustreben würde, sondern je nach dem Aufpunkt, auf den sich das Volumen zusammenzieht, gegen Null oder Unendlich strebt. Der Begriff der Dichtefunktion hat bei einem endlichen Teilchenensemble daher nur Sinn in endlichen Volumina $\Delta\tau$, die ausgedehnt genug sein müssen, um noch eine große Zahl von Teilchen einzuschließen. Voraussetzung ist allerdings auch hier, daß bereits für solche Volumina ausreichender Teilchenbesetzung mit abnehmendem $\Delta\tau \rightarrow 0$ die Dichte einem bestimmten von der absoluten Größe sowie der Form des Volumenelementes unabhängigen Grenzwert zustrebt. Wenn wir oben von der „mittleren“ Dichtefunktion f sprachen, so haben wir außerdem zu beachten, daß der soeben definierte Dichtewert noch über die statistischen Schwankungen eines Zeitintervalles $\Delta_m t$ gemittelt werden soll. Auch dieses Zeitintervall $\Delta_m t$ muß so klein gewählt werden, daß der Mittelwert nicht mehr von der Größe $\Delta_m t$ selbst

abhängig ist. Diese einfachen Bedingungen für die Ausdehnung von $\Delta\tau$ und $\Delta_m t$ sind später in den Gln. (6h–k) formelmäßig erfaßt.

Denken wir uns jedem Aufpunkt des Phasenraumes entsprechend dem Vorgang ein endliches Volumen $\Delta\tau$ zugeordnet und nehmen wir ferner an, daß in jedem dieser Aufpunkte ein mittlerer Dichtegrenzwert im angegebenen Sinne existiert, so haben wir damit eine einwandfreie Definition der Dichtefunktion. Wir können außerdem jedem Aufpunkt nebst Volumenelement $\Delta\tau$ einen mittleren Ortsvektor \bar{r} , eine mittlere Geschwindigkeit \bar{c} und eine mittlere Feldstärke $\bar{\mathfrak{F}}$ zuordnen, indem wir über alle Teilchen des Volumenelementes mitteln und die so erhaltenen Mittelwerte nochmals einer Mittelung über das Zeitintervall $\Delta_m t$ unterwerfen. Mit diesen Größen läßt sich dann die Trägerbilanz leicht formulieren.

Greifen wir einen Aufpunkt r, c heraus und stellen die Frage, wie groß die Zahl der in einem Volumenelement $\Delta\tau$ seiner Umgebung befindlichen Teilchen zur Zeit $t + \Delta t$ sein wird. Diese Zahl ist durch

$$n = f(r, c, t + \Delta t) \Delta\tau \quad (5)$$

gegeben. Da wir die Änderung der Verteilungsfunktion f während des Zeitintervalles Δt untersuchen wollen, muß per definitionem

$$\Delta t \geq \Delta_m t \quad (6a)$$

sein.

Vernachlässigen wir zunächst den Einfluß der inneren Wechselwirkung, so können wir sagen, daß die n Teilchen, die sich zur Zeit $t + \Delta t$ in der Umgebung $\Delta\tau$ von r, c befinden, sich zur Zeit t alle in einem Volumenelement $\Delta\tau'$ in der Umgebung des Aufpunktes

$$\left. \begin{aligned} r' &= r - \bar{c} \cdot \Delta t - \langle \bar{\mathfrak{F}} \cdot \Delta t^2 \rangle \\ c' &= c - \bar{r} \cdot \Delta t - \langle \bar{\mathfrak{F}} \cdot \Delta t^2 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

befunden haben, wenn $\bar{\mathfrak{F}} = \Delta\mathfrak{F}/\Delta t$ die mittlere zeitliche Änderung von \mathfrak{F} bezeichnet. $\langle x \rangle$ gibt hier und im folgenden stets die Größenordnung des Argumentes x an, ohne Rücksicht auf Vorzeichen, Richtung und genauen Betrag. Entsprechende Glieder werden nur zu qualitativen Betrachtungen herangezogen.

Diese Aussage über den Zusammenhang der Teilchendichten $f(r, c, t + \Delta t)$ und $f(r', c', t)$ ist allerdings noch an die Voraussetzungen

$$\langle \bar{c} \cdot \Delta t \rangle > 1; \quad \langle \bar{\mathfrak{F}} \cdot \Delta t \rangle > 1 \quad (6b)$$

gebunden, wenn Δr und Δc , definiert durch

$$\langle (\Delta r)^3 \rangle = \langle (\Delta c)^3 \rangle = 1 \quad (8)$$

die Schwankungen von r und c innerhalb der Volumenelemente ΔV , bzw. ΔV_c kennzeichnen. Die Notwendigkeit dieser Voraussetzung kann man sich leicht veranschaulichen. Nehmen wir nämlich einmal an, daß im Widerspruch zu der Gl. (6b) die Beziehung $\langle \bar{c} \Delta t \rangle = \langle \Delta r \rangle$ gilt, so setzen sich die Teilchen zur Zeit $t + \Delta t$ in $\Delta \tau$, sowohl aus einem Anteil zusammen, der sich zur Zeit t in $\Delta \tau'$ befand, als auch aus einem anderen Anteil, der sich zur Zeit t bereits in $\Delta \tau$ aufhielt. Damit würde aber die obige Aussage über den Zusammenhang zwischen $f(r, c, t + \Delta t)$ und $f(r', c', t)$ ungültig.

Ist dagegen (6b) erfüllt und bezeichnet $\Delta \tau = \Delta_k f$ die Änderung der mittleren Dichte durch innere Wechselwirkung, so gilt die Beziehung

$$f(r, c, t + \Delta t) \cdot \Delta \tau = f(r', c', t) \cdot \Delta \tau' + \Delta_k f(r, c, t) \cdot \Delta \tau \quad (9)$$

$\Delta \tau$ und $\Delta \tau'$ unterscheiden sich nur in Gliedern höherer Ordnung, so daß

$$\Delta \tau \simeq \Delta \tau' \quad (9a)$$

verwendet werden kann.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir als Aufpunkt r, c des Volumenelementes $\Delta \tau$ die Mittelpunktsvektoren r_1, c_1 wählen, wie sie durch

$$r_1, c_1 = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Delta \tau} (r, c) d\tau \quad (10)$$

definiert sind. Dann gilt nach den Gesetzen der statistischen Schwankungen für $(f \Delta \tau) \rightarrow \infty$ die Beziehung $\bar{r}, \bar{c} = r, c$, dagegen für endliche Werte $(f \Delta \tau)$

$$\bar{r} = r \left\{ 1 + \left\langle \frac{\Delta r}{r} \frac{1}{(f \Delta \tau) (1 + \Delta_m t/T)} \right\rangle \right\}, \quad (11a)$$

$$\bar{c} = c \left\{ 1 + \left\langle \frac{\Delta c}{c} \frac{1}{(f \Delta \tau) (1 + \Delta_m t/T)} \right\rangle \right\}, \quad (11b)$$

wo der Faktor $(1 + \Delta_m t/T)$ den Einfluß der zeitlichen Mittelung über $\Delta_m t$ auf die Schwankungen erfaßt¹. T gibt die Zeit an, innerhalb derer sich der Besetzungszustand der Zelle $\Delta \tau$ erneuert. Sie ist mit der kleinsten der drei Größen $\langle \Delta r c \rangle / \langle 1 c \bar{r} \rangle$, $\langle 1 c \bar{c} \rangle / \langle 1 c c \rangle$ zu identifizieren, wo t_c die mittlere freie Flugdauer bezeichnet.

Demgegenüber gilt für $\bar{\mathfrak{F}}$ die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \left\{ 1 + \left\langle \frac{\Delta \mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} \right\rangle \right\}, \quad (11c)$$

¹ Der Einfachheit halber sind die statistischen Schwankungen gemäß der GAUSSschen bzw. POISSONschen Verteilung in der Form zugrunde gelegt, bei der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des einzelnen Individuums als von dem Besetzungszustand der betrachteten Zelle unabhängig vorausgesetzt ist. Bei kollektiven Systemen liefert die integrale Wechselwirkung grundsätzlich einen Korrekturfaktor, auf den wir jedoch hier nicht näher eingehen.

da für $(f, \Delta \tau) \rightarrow \infty$ die Größe $\bar{\delta}$ nicht notwendig mit dem Wert $\bar{\gamma}$ im Aufpunkt zusammenfällt, sondern noch um Beträge $\langle \Delta \bar{\gamma} \rangle$ abweichen kann, wenn $\langle \Delta \bar{\gamma} \rangle$ die Schwankung der Größe $\bar{\gamma}$ innerhalb von $\Delta \tau$ kennzeichnet.

Die Größe $\Delta_K f$ setzt sich aus zwei Anteilen $\Delta_{K1} f$, $\Delta_{K2} f$ zusammen. Der erste $\Delta_{K1} f = \frac{\partial_K f}{\partial t} \cdot \Delta t$ bestimmt die mittlere Änderung der Dichteverteilung wie sie sich für den Fall unendlich großer Teilchenzahlen berechnen würde. Dieses Glied schließt beispielsweise im Fall der langreichweitigen Kräfte den integralen Wechselwirkungsanteil der VLASOVschen Näherung ein. Im Fall des Zweierstoßes entspricht ihm dagegen der Ausdruck der Gleichung

$$\frac{\partial_K f(c_1)}{\partial t} = \int \int_{(c_2)}^{(S)} (f(c'_1) \cdot f(c'_2) - f(c_1) f(c_2)) \mathcal{V} dV_{c_2} dS, \quad (12)$$

wo c'_1 , c'_2 und c_1 , c_2 die Geschwindigkeiten der beiden Stoßpartner vor bzw. nach dem Zusammenstoß bezeichnen, T den Betrag der Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß wiedergibt und dS die Integration über die Stoßparameter kennzeichnet.

Der zweite Anteil $\Delta_{K2} f$ führt wieder von den statistischen Schwankungen her und hat die Form

$$\Delta \tau \cdot \Delta_{K2} f = \left\langle \frac{1}{t_c + \Delta t} \Delta \tau \right\rangle \Delta t, \quad (13)$$

womit wir für $\Delta_K f$ die Beziehung

$$\Delta \tau \cdot \Delta_K f = \left\{ \frac{\partial_K f}{\partial t} \Delta \tau + \left\langle \frac{1}{t_c + \Delta t} \Delta \tau \right\rangle \right\} \Delta t \quad (14)$$

erhalten. Verwenden wir alle diese Ergebnisse (11 a, b, c) und (14) in (9) und führen TAYLOR-Entwicklungen durch, so gewinnen wir endlich die Teilchenbilanz

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{c} \left\{ 1 + \left\langle \frac{\Delta \mathbf{c}}{n \cdot \mathbf{c}} \right\rangle \right\} \cdot \left\{ 1 + \left\langle \frac{\bar{\delta} \cdot \Delta t}{c} \right\rangle \right\} + \\ + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \cdot \bar{\delta} \cdot \left\{ 1 + \left\langle \frac{\Delta \bar{\delta}}{\bar{\delta}} \right\rangle \right\} \left\{ 1 + \left\langle \frac{\bar{\delta} \cdot \Delta t}{\bar{\delta}} \right\rangle \right\} \\ = \frac{\partial_K f}{\partial t} \left\{ 1 + \left\langle \frac{1}{t_c + \Delta t} \right\rangle \right\} + \{ \text{höhere Ableitungen} \} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

mit

$$\kappa = (1 + \Delta_m t / T). \quad (15a)$$

Diese allgemeine Trägerbilanz erlaubt uns abzuschätzen, inwieweit die BOLZMANN Gleichung, abgesehen von den mit dem Stoßterm verbundenen wohlbekannten Schwierigkeiten, eine brauchbare Näherung sein kann.

Unter Verwendung von (6b) ergeben die Koeffizienten von $\partial f/\partial \mathbf{r}$, $\partial f/\partial \mathbf{c}$ und $\partial \kappa f/\partial t$ die Bedingungen

$$\left\langle \frac{\mathbf{Jc}}{c} \right\rangle \ll 1; \quad \left\langle \frac{\mathbf{J}\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{\mathbf{r}}} \right\rangle \ll 1 \quad (6c)$$

und

$$\left\langle \frac{\mathbf{Jn}}{\Delta t + t_c} \right\rangle \ll \frac{\partial \kappa f}{\partial t} \Delta \tau. \quad (6d)$$

Ferner ist die Vernachlässigung der höheren Ableitungen in der eckigen Klammer an die Voraussetzungen

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t \right\rangle \ll \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle, \quad (6e)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2} \Delta \mathbf{r} \right\rangle < \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{t} \right\rangle \ll \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle, \quad (6f)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{c}^2} \Delta \mathbf{c} \right\rangle < \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{c}^2} \tilde{\mathbf{r}} \Delta t \right\rangle \ll \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \right\rangle \quad (6g)$$

gebunden, wobei wir wieder von der Beziehung (6b) Gebrauch gemacht haben.

Sind die Forderungen (6a–g) befriedigt, so geht die allgemeine Formulierung (15) in die BOLTZMANN-Gleichung über, die unter diesen Voraussetzungen, und nur unter diesen Voraussetzungen, eine gute Näherung darstellt.

In diesem Zusammenhang müssen wir allerdings beachten, daß die Bedingungen (6a–g) für die Gültigkeit der Fundamentalgleichung nur notwendigen Charakter besitzen. Bis jetzt haben wir nämlich nur den Einfluß endlicher Raum-Zeit-Intervalle und die Auswirkung der statistischen Unsicherheit der unabhängigen Parameter und Variablen auf die Trägerbilanz (15) berücksichtigt. Die abhängige Variable f wurde dagegen als determiniert behandelt. Das setzt jedoch, wie wir bereits diskutiert haben, voraus, daß der Grenzwert f überhaupt existiert und von der speziellen Art des Grenzüberganges unabhängig ist. Formelmäßig drückt sich diese Voraussetzung durch die Beziehungen

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \Delta_m t \right\rangle \ll \langle f \rangle; \quad \left\langle \frac{\partial \kappa f}{\partial t} \Delta_m t \right\rangle \ll \langle f \rangle, \quad (6h)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} \right\rangle \ll \langle f \rangle; \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \Delta \mathbf{c} \right\rangle \ll \langle f \rangle, \quad (6i)$$

$$\left\langle (f \Delta \tau) \left(1 + \frac{\Delta_m t}{T} \right)^2 \right\rangle \gg 1 \quad (6k)$$

aus, die damit weitere notwendige Bedingungen für die Verwendung der BOLTZMANNschen Beschreibung darstellen.

Schließlich und endlich müssen wir noch verlangen, daß die durch (6a–k) beschränkte raum-zeitliche Einteilung $\Delta \tau, \Delta t$ überhaupt in der

Lage ist, den Verlauf der Funktion f zu erfassen. Bezüglich der räumlichen Komponente $\Delta \tau$ ist dies bereits durch die Bedingungen (6a–k) mitgarantiert. Für die zeitliche Komponente Δt tritt dagegen noch die Forderung

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right\rangle \ll \langle f \rangle; \quad \left\langle \frac{\partial \kappa f}{\partial t} \Delta t \right\rangle \ll \langle f \rangle \quad (6m)$$

hinzu.

Das System der Bedingungsgleichungen (6) zerfällt in zwei Gruppen, nämlich die Forderungen (6a, c, e, f, g, h, i, m) einerseits und die Bedingungen (6b, d, k) andererseits. Die erste Gruppe bestimmt über die Größen $\Delta \tau$ und Δt zu jedem Aufpunkt eine obere Grenze $\Delta \tau_0, \Delta t_0, \Delta m t_0$ der Ausdehnung des Volumenelementes $\Delta \tau$ und der Zeitintervalle $\Delta t, \Delta m t$. Solche raum-zeitlichen Elemente, die der Bedingung $\Delta \tau, \Delta t \leq \Delta \tau_0, \Delta t_0$ genügen, wollen wir als „einheitliche Bereiche“ bezeichnen.

Die zweite Gruppe, die wir nach einfacher Umschreibung in der Form

$$\langle \Delta t \rangle > \left\langle \frac{\Delta \tau}{c} \right\rangle; \quad \langle \Delta t \rangle > \left\langle \frac{\Delta c}{c} \right\rangle, \quad (6b)$$

$$\left\langle (f \Delta \tau) \cdot \left(1 + \frac{ic}{\Delta t}\right)^2 \right\rangle \gg 1, \quad (6d)$$

$$\left\langle (f \Delta \tau) \cdot \left(1 + \frac{\Delta m t}{T}\right)^2 \right\rangle \gg 1 \quad (6k)$$

angeben können, verlangt dagegen offensichtlich eine untere Grenze $\Delta \tau_u, \Delta t_u$ für die Ausdehnung der Volumenelemente $\Delta \tau$ und der Zeitintervalle Δt .

Aus der Existenz der Grenzen $\Delta \tau_0, \Delta t_0$ und $\Delta \tau_u, \Delta t_u$ läßt sich folgender Schluß ziehen:

Liegen die oberen Grenzen $\Delta \tau_0, \Delta t_0$ oberhalb der unteren Grenzen $\Delta \tau_u, \Delta t_u$ so gibt es eine Art der raum-zeitlichen Einteilung, die alle Bedingungen (6) zu befriedigen in der Lage ist und daher die statistische Beschreibung an Hand der Boltzmannschen Gleichung erlaubt. Solche Bereiche des Phasenraumes wollen wir „kollektive Zonen“ nennen, da in diesen Gebieten die Träger in Gruppen zusammengefaßt „kollektiv“, beschrieben werden können.

Liegen dagegen die oberen Grenzen $\Delta \tau_0, \Delta t_0$ unterhalb der unteren Grenzen $\Delta \tau_u, \Delta t_u$, so gibt es überhaupt keine Art der raumlich-zeitlichen Einteilung, die alle Bedingungen (6) gemeinsam zu befriedigen vermag. Solche Zonen des Phasenraumes wollen wir „individuelle Zonen“ nennen, da hier die speziellen Eigenschaften, die Koordinaten jedes einzelnen Individuums, von Bedeutung werden. In diesen Bereichen bricht die statistische Beschreibung zusammen, oder zum mindesten ist dort die einfache Boltzmannsche Fundamentalgleichung nicht mehr in der Lage, die Verhältnisse richtig zu erfassen.

Damit haben wir ein Kriterium gefunden, um zu entscheiden, ob ein beliebiger Bereich des Phasenraumes sich hinsichtlich der Bewegungsgesetze kollektiv beschreiben läßt und die Anwendung der BOLTZMANNschen Gleichung erlaubt, oder aber als individuell bezeichnet werden muß, und damit eine Beschreibung größerer Bestimmtheit unter Berücksichtigung des Teilchencharakters erfordert. Die Unterscheidung „kollektive-individuelle“ Beschreibung findet ihre formelmäßige Niederschrift in der Ungleichung

$$\Delta\tau_u, \Delta t_u \leq \Delta\tau_0, \Delta t_0, \quad (16)$$

die entsprechende Bereiche des Phasenraumes gegeneinander abgrenzt.

Jetzt können wir auch die Frage beantworten, wie eine Anordnung beschaffen sein müßte, deren Verhalten in allen Bereichen und bei allen Vorgängen durch die Fundamentalgleichung exakt beschrieben werden kann. Dies wäre gerade die Modellvorstellung, welche der üblichen unbeschränkten Anwendung der BOLTZMANN-Gleichung stillschweigend zugrunde gelegt ist. Das gesuchte Modell muß aus der wirklichen Gesamtheit durch eine Veränderung hervorgehen, die die unteren Grenzen $\Delta\tau_u, \Delta t_u$ gegen Null streben läßt. Halten wir die in einem gewissen Raumbereich vorhandenen Gesamtqualitäten (beispielsweise Ladung, Masse usw.) konstant und unterteilen jeden einzelnen Träger unendlich fein, so wird bei konstanten Eigenschaften des Systems die Größe f über alle Grenzen anwachsen und die Gleichungen (6h—k) lassen erkennen, daß mit zunehmender Dispersion die Größen $\Delta\tau_u$ und Δt_u wirklich gegen Null streben.

Damit erweist sich das Dispersionsmodell als grundlegende Modellvorstellung aller Überlegungen, welche die statistischen Bewegungsgleichungen uneingeschränkt verwenden und ihre Ergebnisse als völlig bestimmt interpretieren. Bezüglich der statistischen Dynamik ist das D-Modell also sowohl bei den Systemen mit langreichweitigen, als auch bei denjenigen mit kurzreichweitigen Zwischenkräften bereits stillschweigend vorausgesetzt. Es besitzt daher abgesehen von seiner Bedeutung zur Formulierung der kollektiven Wechselwirkung einen umfangreichen und allgemeineren Anwendungsbereich im Hinblick auf die statistische Dynamik. In diesem Sinne ist das D-Modell keine für die Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung spezifische Modellvorstellung, sondern seine Anwendung in der VLASOVschen Näherung muß lediglich als eine Ausdehnung des allgemeinen dynamischen Anwendungsbereiches auf die Berechnung der inneren Wechselwirkung betrachtet werden.

Wir haben im Vorgang gesehen, wie die Güte des D-Modelles bezüglich der statistischen Dynamik an gewisse Voraussetzungen (6) gebunden ist und in gewissen Bereichen, die durch (16) abgegrenzt sind, zusammen-

brechen kann. Entsprechendes gilt natürlich auch bezüglich der Anwendung des gleichen Modells auf die Berechnung der inneren Wechselwirkung, — ja wir wissen bereits, daß hier das D-Modell im „Normalfall“ (kurzreichweitige Zwischenkräfte) völlig unzulänglich ist und nur im Fall der langreichweitigen Zwischenkräfte sinnvoll verwendet werden kann.

Mit dieser qualitativen Feststellung wollen wir uns jedoch nicht begnügen. Wir werden vielmehr Bedingungen herleiten, die analog zu den Beziehungen (6) und (16) die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des D-Modells zur Berechnung der inneren Wechselwirkung quantitativ formulieren.

Unter der inneren Wechselwirkung verstehen wir die über das oben definierte Zeitintervall $\Delta_m t$ gemittelte Einwirkung $K(\mathbf{r}_i) = \langle \mathbf{K}(\mathbf{r}_i) \rangle$, welche ein beliebig herausgegriffener Träger im Aufpunkt \mathbf{r}_i durch die Anwesenheit der übrigen Teile des Ensembles erfährt, bzw. seinerseits auf die übrigen Teile ausübt. Die Kenntnis dieser Größe K ist notwendige Voraussetzung zur Berechnung des Gliedes $\epsilon_i^2 / \Delta_m t$ der BOLZMANN-Gleichung.

In der determinierten Beschreibung, in der wir den Ort jedes einzelnen Trägers als bekannt voraussetzen dürfen, wäre K durch die Beziehung

$$K(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\Delta_m t} \int \sum \frac{\epsilon^2 dt}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|^m} = \frac{1}{\Delta_m t} \int \sum \frac{\epsilon^2 dt}{|\mathbf{r}_{is}|^m} \quad (17)$$

gegeben, wo die Summe über alle s von 1 bis N unter Ausschluß von $s = i$ läuft und $\epsilon^2 / |\mathbf{r}_{is}|^m$ das Wechselwirkungsgesetz des s -ten mit dem i -ten Träger kennzeichnet. Da wir jedoch bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen aus den bekannten Gründen die determinierte Beschreibung verlassen haben, müssen wir jetzt auch versuchen $K(\mathbf{r}_i)$ als Funktion der allgemeineren Zustandsvariablen $\dot{\mathbf{r}}$ oder, da die Zwischenkräfte geschwindigkeitsunabhängig sind, besser durch

$$q = \int \overset{(c)}{f} d\mathbf{c} \quad (18)$$

auszudrücken. Zu diesem Zweck greifen wir ein Volumen ΔV_{rv} im geometrischen Raum heraus und kennzeichnen seine Lage durch den Mittelpunktvektor

$$\mathbf{r}_{rv} = \frac{1}{\Delta V_{rv}} \int (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) dV_r. \quad (19)$$

Denken wir uns den gesamten geometrischen Raum in solche Teilmoleküla ΔV_{rv} aufgeteilt und führen wir die Summation in (17) bezüglich

aller ΔV_{rv} aus, so ergibt sich

$$K(r_i) = \sum_v \frac{\varepsilon^2 \cdot \bar{\varrho}_v \cdot \Delta V_{rv}}{|\bar{r}_{iv}|^m}, \quad (20a)$$

wo

$$\frac{1}{|\bar{r}_{iv}|^m} = \frac{1}{\bar{\varrho}_v \cdot \Delta V_{rv}} \cdot \sum_s \frac{\varepsilon^2}{|r_i - r_s|^m} \quad (20b)$$

als Definitionsgleichung für \bar{r}_{iv} aufzufassen ist und für $\bar{\varrho}_v$ die Definitionsgleichung

$$\Delta V_{rv} \cdot \Delta_m t \cdot \bar{\varrho}_v = \int \int \varrho dt dV_r \quad (21)$$

gilt. \bar{r}_{iv} ist im allgemeinen nicht mit r_{iv} identisch, sondern die beiden Vektoren können je nach der Potenz m und der Dichteverteilung ϱ , definiert gemäß Gl. (18), um $|r_i|$ voneinander abweichen. Die Teilchenzahl $\bar{\varrho}_v \cdot \Delta V_{rv}$ ist infolge der statistischen Schwankungen nur bis auf Glieder

$$\left\langle \bar{\varrho}_v \cdot \Delta V_{rv} / \left(1 + \frac{\Delta_m t}{\Delta r/\bar{c}} \right) \right\rangle \quad (22)$$

festgelegt. Damit ergibt sich für $K(r_i)$ die Beziehung

$$K(r_i) = \sum_v \frac{\varepsilon^2 \cdot \bar{\varrho}_v \cdot \Delta V_{rv}}{|\bar{r}_{iv}|^m} \frac{\left\langle 1 + \frac{\Delta_m t}{\Delta r/\bar{c}} \cdot \varrho \cdot \Delta V_{rv} \cdot \left(1 - \frac{\Delta_m t}{\Delta r/\bar{c}} \right) \right\rangle}{\left(1 - \langle \Delta r_v r_{iv} \rangle \right)^m}. \quad (23)$$

An Hand dieser Formel erkennen wir unter Verwendung von (21) sofort, daß die von VLASOV empfohlene Berechnung nur dann eine brauchbare Näherung liefern kann, wenn die Voraussetzungen

$$\left\langle \varrho \cdot \Delta V_{rv} \cdot \left(1 + \frac{\Delta_m t}{\Delta r/\bar{c}} \right) \right\rangle \gg 1, \quad (24a)$$

$$\left\langle m \cdot \frac{\Delta r_v}{r_{iv}} \right\rangle \ll 1 \quad (24b)$$

erfüllt sind. Auch die VLASOVsche Näherung ist also, ganz entsprechend zu den in (6) und (16) beschriebenen Verhältnissen, an zwei gegenläufige Bedingungen gebunden¹. Gl. (24a) definiert eine von der örtlichen Teilchendichte abhängige unterste Grenze ΔV_{r_u} der Ausdehnung der Volumenelemente ΔV_{rv} , während (24b) andererseits eine obere Grenze ΔV_{r_o} vorschreibt.

In voller Analogie zu den Überlegungen bei den dynamischen Grundgesetzen können wir daher auch hier die Umgebung des Aufpunktes r_i

¹ Weitere Bedingungsgleichungen für die Orts-Zeitabhängigkeit von ϱ , analog zu den Beziehungen (6), werden nicht angegeben, da sie für die folgenden Überlegungen nicht benötigt werden.

in zwei Zonen aufteilen; die bezüglich der Berechnung der Wechselwirkung auf r_i wesentlich verschiedene Qualitäten besitzen.

Gilt nämlich in dem einen Bereich $\Delta V_{ru} < \Delta V_{r0}$, so gibt es eine Art der Einteilung ΔV_r , so daß die VLASOVsche Näherung als brauchbare Formulierung der Wechselwirkung angesehen werden kann. Diesen Bereich des Raumes nennen wir wie oben „kollektive Zone“. In dem anderen Gebiet dagegen, wo $\Delta V_{ru} > \Delta V_{r0}$ gilt, existiert überhaupt keine Einteilung ΔV_r , die die Bedingungen (24) gleichzeitig befriedigen kann. Die Anwendung des D-Modelles zur Berechnung der Wechselwirkung ist in diesen Bereichen ausgeschlossen. Der Teilchencharakter des einzelnen Individuums gewinnt an Bedeutung, und wir bezeichnen diese Zone wie oben als „individuelle Zone“. Die Bedingung

$$\Delta V_{ru} \geq \Delta V_{r0} \quad (25)$$

grenzt individuelle und kollektive Bereiche gegeneinander ab.

Es ist besonders beachtenswert, daß die durch (25) gekennzeichnete Einteilung des Raumes keineswegs mit der oben bestimmten Einteilung (16) des Phasenraumes identisch ist. — ebensowenig, wie die Raumaufteilungen für verschiedene Aufpunkte r_i miteinander übereinstimmen.

Hieraus gewinnen wir die Einsicht, daß es irreführend ist, von „der individuellen Teilchenkomponente“ oder „der kollektiven Partikelkomponente“ eines Systems zu sprechen (3, 4, 5), sondern daß wir über „individuelle“ und „kollektive Teilchenaspekte“ nur in wesentlich präziserer Formulierung Aussagen machen dürfen. Die richtige Aussage würde lauten, daß eine bestimmte Gruppe von Trägern in einem bestimmten Bereich des Phasenraumes zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem vorgegebenen Vorgang hinsichtlich einer ganz bestimmten Verhaltensweise (Bewegungsgesetze, Wechselwirkung mit dem Aufpunkt r_i oder r_k) kollektiv bzw. individuell beschrieben werden muß. Das schließt dann selbstverständlich nicht aus, daß andere Bereiche des Phasenraumes zur gleichen Zeit, im gleichen System und bei dem gleichen Vorgang gerade die entgegengesetzte Beschreibung erfordern, ebensowenig, wie die gleiche Trägergruppe zu einem späteren Zeitpunkt oder bezüglich einer anderen Verhaltensweise durchaus individuelle bzw. kollektive Beschreibung verlangen kann. Der Begriff der individuellen bzw. kollektiven Komponente ist also in mannigfaltiger Weise von vielen Parametern abhängig und keiner einfachen Zuordnung zu einem vorgegebenen System fähig.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die hier diskutierte Einteilung in individuelle und kollektive Zonen nicht so scharf ist, wie es nach der vorausgegangenen schematischen Formulierung scheinen mag. Auch in denjenigen Zonen, die als kollektiv bzw. individuell gekennzeichnet wurden, spielen individuelle bzw. kollektive Einflüsse noch eine gewisse,

wenn auch untergeordnete Rolle, je nachdem, wie gut die Bedingungen (6) und (24) befriedigt sind. Welches Teilchenensemble wir auch immer untersuchen, es werden stets beide Einflüsse gleichzeitig zu berücksichtigen sein.

Betrachten wir beispielsweise den wichtigen Fall eines Neutralgases unter Normalbedingungen, so liefern die kurzreichweitigen Zwischenkräfte der Neutralatome bei den üblichen Dichten keine nennenswerte kollektive Komponente, so daß die VLASOVsche Näherung — wie natürlich wohlbekannt ist — unbrauchbar wird. Dies bedeutet jedoch keinesfalls, daß die Zahl der Individuen nicht groß genug wäre, um bezüglich der Trägerkinetik die Anwendung kollektiver Beschreibung, beispielsweise an Hand der BOLTZMANN-Gleichung, zu gestatten.

Dieser besonders geläufige Fall liefert uns also ein Beispiel, wo bezüglich der einen Verhaltensweise (Trägerdynamik) das gesamte System unter Verwendung des D-Modelles kollektiv beschrieben werden kann, während bezüglich der anderen Verhaltensweise (innere Wechselwirkung) die individuelle Teilchenkomponente allgemein überwiegt und das D-Modell eine unbrauchbare Näherung liefert.

Die Gegebenheiten sind natürlich nicht allgemein anwendbar. Je nach den speziellen Eigenschaften der Träger und des gesamten Ensembles können die Bedingungen (6) verlangen, daß gewisse individuelle Zonen des Phasenraumes von der kollektiven Behandlung und damit von der Anwendung der BOLTZMANN-Gleichung ausgeschlossen werden. Andererseits wiederum ist es auch möglich, daß die Voraussetzungen (24), wie beispielsweise im Fall der VLASOVschen Näherung, die Ausdehnung der Anwendung des D-Modelles auf die Berechnung der Wechselwirkung erlauben.

Beachtet man die in 6 und (24) zusammengefaßten Vorschriften nicht, so kann die Anwendung falscher Modellvorstellungen auf verbotene Bereiche natürlich zu Diskrepanzen und Schwierigkeiten führen. Wir wollen in einer folgenden Untersuchung die hier gewonnenen allgemeinen Ergebnisse (6), (16), (24) und (25) unter besonderer Berücksichtigung der Plasmadynamik auswerten, und es wird sich zeigen, daß diese Gesichtspunkte für die Klärung der in der Einleitung geschilderten Situation von wesentlicher Bedeutung sind.

Herrn Professor K. G. EMELEUS bin ich für sein lebhaftes Interesse am Fortgang der Arbeit zu Dank verpflichtet. Die Royal Society und die Queen's University Belfast, haben meinen Aufenthalt in Belfast ermöglicht. Ich möchte auch an dieser Stelle den genannten Institutionen meinen Dank für ihre Einladung ausdrücken.

Literatur.

[1] VLASOV, A.: J. Exper. a. Theor. Phys. **8**, 291 (1938). — [2] VLASOV, A.: J. of Phys. **9**, 25 (1945). — [3] BOHM, D., and D. PINES: Phys. Rev. **82**, 625 (1951). — [4] BOHM, D., and D. PINES: Phys. Rev. **85**, 338 (1952). — [5] BOHM, D.,

and D. PINES: Phys. Rev. **92**, 609 (1953). — [6] PENNING, F. M.: Nature, Lond. **118**, 301 (1926). — Physica, Haag **6**, 241 (1926). — [7] LANGMUIR, I., and L. TONKS: Phys. Rev. **33**, 195 (1929). — [8] WEHNER, G.: J. Appl. Phys. **21**, 62 (1950). — [9] MERILL, H. J., and H. W. WEBB: Phys. Rev. **55**, 1191 (1939). — [10] ARMSTRONG, E. B.: Nature, Lond. **160**, 713 (1947). — [11] PIERCE, J. R., and W. B. HEBENSTREIT: Bell Syst. Techn. J. **27**, 33 (1949). — [12] HAEFF, A. V.: Proc. Inst. Radio Engrs. **37**, 1 (1949). — Phys. Rev. **75**, 1546 (1949). — [13] ARMSTRONG, B. G., and K. G. EMELEUS: Proc. Inst. Electr. Engrs. **96**, 390 (1949). — [14] NEILL, T. R.: Nature, Lond. **163**, 59 (1949). — [15] EMELEUS, K. G., and T. R. NEILL: Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A **53**, 197 (1951). — [16] LINDER, E. G.: Phys. Rev. **49**, 753 (1936). — [17] ROMPE, R., u. M. STEENBECK: Ergebn. exakt. Naturw. **18**, 281 (1939). — [18] THOMSON, J. J., and G. P. THOMSON: Conduction of Electricity in Gases, Bd. 2, S. 353. London: Cambridge University Press 1933. — [19] HAHN, W. C.: Gen. Electr. Rev. **42**, 258 (1939). — [20] HAEFF, A. V.: Phys. Rev. **74**, 1532 (1948). — [21] PIERCE, J. R.: J. Appl. Phys. **19**, 231 (1948). — [22] PIERCE, J. R.: J. Appl. Phys. **20**, 1060 (1949). — [23] PIERCE, J. R.: J. Appl. Phys. **21**, 1063 (1950). — [24] GABOR, D.: Brit. J. Appl. Phys. **2**, 209 (1951). — [25] KENT, G.: J. Appl. Phys. **25**, 32 (1954). — [26] TWISS, R. Q.: Proc. Phys. Soc. **64**, 654 (1951). — [27] TWISS, R. Q.: Phys. Rev. **88**, 1392 (1952). — [28] TWISS, R. Q.: Phys. Rev. **80**, 767 (1950). — [29] TWISS, R. Q.: Phys. Rev. **84**, 448 (1951). — [30] BOHM, D., and E. P. GROSS: Phys. Rev. **75**, 1850 (1949). — [31] BOHM, D., and E. P. GROSS: Phys. Rev. **75**, 1865 (1949). — [32] BOHM, D., and E. P. GROSS: Phys. Rev. **79**, 993 (1950). — [33] BAILEY, V. A.: J. Roy. Soc. O New South Wales **82**, 107 (1948). — [34] BAILEY, V. A.: Nature, Lond. **161**, 599 (1948). — [35] BAILEY, V. A.: Phys. Rev. **75**, 1104 (1949). — [36] BAILEY, V. A.: Phys. Rev. **78**, 428 (1950). — [37] BAILEY, V. A.: Phys. Rev. **83**, 439 (1951). — [38] LANDAU, L.: J. of Phys. **10**, 25 (1946). — [39] GROSS, E. P.: Phys. Rev. **82**, 232 (1951). — [40] BHATNAGAR, P. L., E. P. GROSS and M. CROOK: Phys. Rev. **94**, 511 (1954). — [41] CHAPMAN and COWLING: The Mathematical Theory of non-uniform Gases. London: Cambridge University Press 1952.

Belfast, Queen's University, Department of Physics¹.

¹ Jetzige Anschrift: Institut für Theoretische Physik der Universität Bonn.

Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung.

II. Die Bedeutung der Beschränkungen des D-Modelles für die Begriffsbildung und Ergebnisse kollektiver Beschreibung.

Von

G. ECKER.

(Eingegangen am 24. Dezember 1954.)

In einer vorausgegangenen Arbeit I haben wir auf gewisse Mängel und Diskrepanzen bei der Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung hingewiesen und die Vermutung ausgesprochen, daß diese Unstimmigkeiten verursacht sein könnten durch ungenügende Beachtung der Grenzen kollektiver Beschreibung. Darum haben wir uns in I um die Formulierung allgemeiner Bedingungen für die Anwendbarkeit kollektiver Beschreibung bemüht und erkannt, daß das erstmals von TWISS vorgeschlagene Dispersionsmodell (D-Modell) nicht nur die Basis der VLASOVschen Näherung bildet, sondern auch bei der Anwendung der gaskinetischen Grundgleichungen (beispielsweise der BOLTZMANN-Gleichung) stillschweigend vorausgesetzt ist. Im Hinblick auf die Berechnung der inneren Wechselwirkung bzw. die Formulierung der Trägerkinetik ergeben sich zwei verschiedene Gleichungssysteme zur Beschränkung der kollektiven Methodik. Ihre Auswertung in der vorliegenden Untersuchung liefert zunächst eine klare Definition des Stoßbegriffes und eine Begrenzung der Stoßzone. Es zeigt sich, daß die in der Literatur bisher verwendeten Vorstellungen der Korrektur bedürfen. Mit Hilfe der Resultate für den Stoßvorgang läßt sich ein Kriterium für die Anwendbarkeit der VLASOVschen Näherung in Abhängigkeit von den verschiedenen Eigenschaften des untersuchten Systems herleiten. Die Auswertung der Bedingungsgleichungen für die Trägerkinetik zeigt ferner, daß die Divergenzschwierigkeiten verursacht sind durch ungerechtfertigte Anwendung des D-Modelles auf Bereiche, in denen die kollektive Beschreibung zusammenbricht. Auch die Diskrepanzen zwischen den Ergebnissen der verschiedenen mathematischen Verfahren (Substitutionsanalysis-LAPLACE-Transformation) erklären sich aus einer Überlastung der genannten Modellvorstellung.

In einer vorausgegangenen Arbeit¹ haben wir die Beschreibung der Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung kritisch betrachtet und die Beschränkungen der verwendeten Modellvorstellungen allgemein formuliert.

Wir fanden, daß sich die Untersuchungen im Hinblick auf die Anwendungen fast ausnahmslos mit zwei Anordnungen befassen, nämlich entweder [1] bis [9] mit einer endlichen Zahl von Trägerströmen bestimmter Geschwindigkeit (A) oder aber [9] bis [29] mit einer Gesamtheit in thermisch ungeordneter Bewegung (B). Die linearen Untersuchungen

¹ Z. Physik **140**, 274 (1955); im folgenden mit I bezeichnet.

der Anordnung (A) liefern prinzipiell befriedigende Resultate. In dem besonders wichtigen Fall der Anordnung (B) dagegen ergeben sich Schwierigkeiten und Diskrepanzen, wie sie a. a. O. ausführlicher diskutiert wurden. Die Art dieser Schwierigkeiten legte die Vermutung nahe, daß sie durch Überlastung der verwendeten Modellvorstellungen verursacht sind.

Das Modell, welches die zentrale Rolle bei der Beschreibung der Systeme mit kollektiver Wechselwirkung spielt, ist die „dispergierte Trägergesamtheit“ (D-Modell). Diese grundlegende Modellvorstellung legt eine fiktives System zugrunde, welches aus dem wirklichen Ensemble hervorgeht, wenn wir jeden Träger unter Konstanzhaltung seiner spezifischen Ladung „unendlich fein dispergieren“ und sie zum Anschluß an die benachbarten Träger verteilen. Das D-Modell wurde ursprünglich, im Nachgang zu Twiss ⁹, zur Realisierung der VLASOVschen Näherung eingeführt. VLASOV hat bekanntlich ^{10, 11} zur Berechnung der Wechselwirkung von Teilchen mit langreichweitigen Zwischenkräften unter völliger Vernachlässigung der Stoßvorgänge die Vorstellung der „verschmierten Ladung“ empfohlen und in diesem Zusammenhang auch den Ausdruck der „kollektiven Wechselwirkung“ geprägt. Indessen konnten wir uns in I vergewissern, daß das D-Modell allgemeinere Bedeutung besitzt, insofern, als es auch die Basis der statistischen Trägerkinetik bildet.

Dieser Umstand findet allerdings gewöhnlich keine besondere Beachtung, da bei den meisten Anwendungen die dispergierte Gesamtheit das wirkliche Ensemble bezüglich der Kinetik in ausgezeichneter Weise annähert. Ganz im Gegensatz zu der Formulierung der Wechselwirkung, wo das D-Modell, abgesehen von dem Fall der langreichweitigen Zwischenkräfte, sich als völlig ungeeignet erweist. Man muß sich jedoch bewußt sein, daß es lediglich unserer Gewohnung an diese „Normalverhältnisse“ zuzuschreiben ist, wenn wir die Verwendung des Dispersionsmodelles bei der Berechnung der kollektiven Wechselwirkung als augenfällig empfinden, während wir uns seine grundlegende Bedeutung für die Trägerkinetik im allgemeinen gar nicht vergegenwärtigen. So aber, wie bei den langreichweitigen Zwischenkräften das D-Modell plötzlich eine brauchbare Basis zur Berechnung der Wechselwirkung bildet, so kann natürlich auch umgekehrt die in bezug auf die Gaskinetik gewohnte Zuverlässigkeit der gleichen Modellvorstellung zusammenbrechen. Daran muß man denken, wenn man die gaskinetischen Grundgleichungen anwendet. Beachtet man diese Beschränkungen nicht, so wird man sich über das Auftreten von Diskrepanzen ebensowenig wundern dürfen, wie man erwarten kann, an Hand der VLASOVschen Näherung eine brauchbare Beschreibung von Systemen mit vorwiegend individueller Wechselwirkung zu erreichen.

Die Bedeutung dieser Aussage für die kollektive Begriffsbildung und die in der Einleitung zu I geschilderten Schwierigkeiten der Plasmabeschreibung wollen wir hier untersuchen.

Dazu gehen wir von den allgemeinen Bedingungsgleichungen aus, wie wir sie in I zur Begrenzung der Bereiche kollektiven Verhaltens gewonnen haben. Für die Anwendbarkeit des D-Modelles zur Berechnung der inneren Wechselwirkung hatten sich a. a. O. Gl. (24) die Bedingungen

$$\langle \sqrt{\varrho \cdot \Delta V_r} \cdot \left(1 + \frac{\Delta_m t}{\Delta r_i \bar{c}}\right) \rangle \gg 1 \quad (1a)$$

$$\langle m \cdot \Delta r_i / r_i \rangle \ll 1 \quad (1b)$$

ergeben, während die Brauchbarkeit der gleichen Modellvorstellung hinsichtlich der Trägerkinetik nach dem Gleichungssystem (6) a. a. O. die Erfüllung der Forderungen

$$\langle \Delta t \rangle > \langle \Delta_m t \rangle, \quad (2a)$$

$$\langle \frac{\Delta c}{c} \rangle \ll 1; \quad \langle \frac{\Delta \tilde{\mathfrak{F}}}{\tilde{\mathfrak{F}}} \rangle \ll 1, \quad (2b)$$

$$\langle \frac{\bar{c} \Delta t}{\Delta r} \rangle > 1; \quad \langle \frac{\tilde{\mathfrak{F}} \Delta t}{\Delta c} \rangle > 1, \quad (2c)$$

$$\langle \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \rangle \ll \langle f \rangle; \quad \langle \frac{\partial_{\kappa} f}{\partial t} \Delta t \rangle \ll \langle f \rangle, \quad (2d)$$

$$\langle \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r \rangle \ll \langle f \rangle; \quad \langle \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c \rangle \ll \langle f \rangle, \quad (2e)$$

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t \rangle \ll \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle, \quad (2f)$$

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \Delta c \rangle < \langle \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \tilde{\mathfrak{F}} \Delta t \rangle \ll \langle \frac{\partial f}{\partial c} \rangle, \quad (2g)$$

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Delta r \rangle < \langle \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} c \Delta t \rangle \ll \langle \frac{\partial f}{\partial r} \rangle, \quad (2h)$$

$$\langle \sqrt{f \cdot \Delta \tau} \cdot \left(1 + \frac{t_c}{\Delta t}\right) \rangle \gg 1, \quad (2i)$$

$$\langle \sqrt{f \cdot \Delta \tau} \cdot \left(1 + \frac{\Delta_m t}{T}\right) \rangle \gg 1 \quad (2j)$$

voraussetzt. In diesen Formeln bezeichnet c , r , t Geschwindigkeit, Ort und Zeit, r_i den Ortsvektor bezogen auf den i -ten Aufpunkt, $\tilde{\mathfrak{F}}(r, c, t) = K(r, c, t)/m$ die Kraft pro Masseneinheit und f bzw. $\varrho = \int f d\mathfrak{c}$ die mittlere Dichtefunktion im Phasenraum bzw. im geometrischen Raum. $\langle x \rangle$ kennzeichnet die Größenordnung des Argumentes x . ΔV_c , ΔV_r , $\Delta \tau$ bezeichnen die Einteilung des Geschwindigkeits-, des geometrischen und des Phasenraumes in Volumenelemente, während $\langle \Delta c \rangle$, $\langle \Delta r \rangle$ und $\langle \Delta \tilde{\mathfrak{F}} \rangle$

die Schwankungen innerhalb dieser Volumenelemente angeben. Es gilt

$$\left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\Delta V_r} \right\rangle = \left\langle \frac{(\Delta c)^2}{\Delta V_c} \right\rangle = 1. \quad (3)$$

Δt charakterisiert die Zeiteinteilung, $\Delta_m t$ das Zeitintervall, über welches die Mittelung der Dichtefunktionen f , ϱ erstreckt werden kann. t_c ist die freie Flugdauer und T wird als mittlere Dauer für den Wechsel des Besetzungszustandes einer Zelle $\Delta \tau$ durch die kleinste der drei Größen $\langle t_c \rangle$, $\langle \Delta c \bar{\delta} \rangle$ und $\langle \Delta \tau c \rangle$ bestimmt. m gibt die Potenz des Abstandsgesetzes der Zwischenkräfte an.

Aus den Gleichungssystemen (1) und (2) lassen sich verschiedene interessante Schlussfolgerungen ziehen. Wir wollen zunächst aus (1) ein Kriterium für die Anwendbarkeit der VLASOVschen Näherung herleiten.

Dazu betrachten wir die Wechselwirkung eines Aufpunktes (i) mit seiner Umgebung und bestimmen das Verhältnis der individuellen (K_i) zur kollektiven (K_K) Wechselwirkungskomponente. Der Bereich der kollektiven Wechselwirkung in bezug auf den Aufpunkt (i) ist durch die Bedingungen (1) beschränkt. Diese Beschränkung ist jedoch, wie wir bereits in I betont haben, nicht von der Art, daß die Einwirkung der Teilchen jenseits eines gewissen Grenzabstandes r_c exakt durch die VLASOVsche Näherung erfüllt werden könnte, während die Wechselwirkung aller Träger diesseits r_c als Zweierstoß beschrieben werden müßte. Der Übergang zwischen kollektiver und individueller Zone ist vielmehr ein stetiger. Daher liegt es in der Natur der Sache, daß alle Angaben über r_c mit einem gewissen Spielraum behaftet sind, indem es uns noch belassen ist, eine wie große Abweichung von den Formulierungen des D-Modelles wir als Grenze kollektiver Beschreibung ansehen wollen, — mit anderen Worten, welche Wertung wir dem \gg -Zeichen in (1) geben. Entschließen wir uns, die Grenze kollektiver Beschreibung dort zu setzen, wo der individuelle Einfluß eines Volumenelementes auf den Aufpunkt (i) sich zu dem entsprechenden kollektiven Einfluß wie $1/\gamma_1$ verhält, so finden wir aus (1) für r_c die Bestimmungsgleichung

$$\frac{r_s}{\gamma_1 \cdot m} \cdot \left(\frac{r_s}{\gamma_1 \cdot m} + \bar{c} \cdot \Delta_m t \right)^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varrho}. \quad (4)$$

Diese Formel folgt unmittelbar aus (1a) unter Verwendung der Beziehungen (1b) und (3). Ein Umstand ist dabei besonders beachtenswert. Die Gl (1a) setzt nämlich voraus, daß die Träger des betrachteten Volumenelementes mit ihrer gesamten Dichte $\bar{\varrho}$ sowohl zur individuellen, wie auch zur kollektiven Wechselwirkungskomponente im Aufpunkt (i) beitragen. Hinsichtlich der individuellen Komponente ist diese Annahme stets berechtigt. Bezüglich der *resultierenden* kollektiven Komponente

- und nur diese ist von Interesse - stimmt dies jedoch nicht immer, indem für die lineare Näherung $\varrho = \varrho_1 + \varrho_0$ sich alle Beiträge von ϱ_0 herausheben, so daß nur der kleine Anteil ϱ_1 zur kollektiven Komponente in (i) beiträgt. Unter diesen Umständen ist, bei sonst unveränderter Wertung des \gg -Zeichens, in (1a) die linke Seite mit dem Faktor ϱ_1/ϱ_0 zu multiplizieren. Damit geht dann auch die Beziehung (4) in

$$\frac{r_s}{\gamma_1 \cdot m} \cdot \left(\frac{r_s}{\gamma_1 \cdot m} + \bar{c} \cdot \Delta_m t \right)^2 = \frac{\gamma_1^2 \cdot \kappa^3}{\varrho} \quad (4a)$$

über, wenn $\kappa^3 = \varrho_0^2/\varrho_1^2$ gilt.

In dem speziellen Fall einer Plasmaschwingung erhalten wir dann mit $m=2$ und $\Delta_m t = 1/\omega$ (ω = Kreisfrequenz)

$$\frac{r_s}{2\gamma_1} \left(\frac{r_s}{2\gamma_1} + l_D \right)^2 = (2\gamma_1)^2 \cdot (\kappa \cdot a)^3, \quad (5a)$$

wo l_D die DEBYE-Länge und a den Grenzradius des aufpunktnächsten Teilchens

$$l_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi\varrho e^2}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt[4]{4\varrho}} \quad (5b)$$

kennzeichnet. Diese Formel erlaubt uns den Stoßparameter r_s als Funktion der Temperatur und Dichte zu bestimmen. Wie ohne weiteres ersichtlich ist, gilt für $l_D \gg (2\gamma_1)^{\frac{2}{3}} \cdot \kappa \cdot a$ die Beziehung

$$r_s = (2\gamma_1)^3 \cdot \kappa^3 \cdot \left(\frac{a}{l_D} \right)^2 \cdot a, \quad (5c)$$

während wir für $l_D \ll (2\gamma_1)^{\frac{2}{3}} \cdot \kappa \cdot a$ die Formel

$$r_s = (2\gamma_1)^{\frac{2}{3}} \cdot \kappa \cdot a \quad (5d)$$

erhalten¹. Für a/l_D gilt

$$a/l_D = \varrho^{\frac{1}{4}}/10,7 \cdot \sqrt{T}. \quad (5e)$$

Die Formeln (5) lassen erkennen, daß der Radius r_s der Stoßzone von der Dichte und der Temperatur abhängt. Für Plasmen mit hoher Trägerdichte übt die Temperatur keinen Einfluß aus. Bei den üblichen Dichten

¹ Hinsichtlich der Beziehungen (5) muß man bedenken, daß zur Herleitung der Bedingungsgleichungen (1), (2) in I die statistischen Schwankungen gemäß der GAUSSSchen oder POISSON-Verteilung, d.h. unter Verwendung einer vom Besetzungszustand der Zelle unabhängigen a-priori-Wahrscheinlichkeit, zugrunde gelegt wurden. Bei kollektiver Wechselwirkung ist diese Annahme nicht voll berechtigt und es tritt daher strenggenommen auf der linken Seite der Gl. (1a) noch ein Korrekturfaktor $(1 + \Omega)$ hinzu, wo Ω im wesentlichen durch das Verhältnis der elektrischen zur thermischen Zellenenergie bestimmt ist. Im Fall der hier untersuchten Plasmen gilt

$$\Omega = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0} \cdot \frac{a}{l_D} \right)^2 \cdot (\varrho \cdot 11r).$$

dagegen zeigt das Glied l_D , daß die Verbesserung der kollektiven Beschreibung durch die zeitliche Mittelung über das Intervall $\Delta_m t$ von Bedeutung ist. Darüber hinaus wird r aber auch wesentlich durch die Werte von $\alpha^3 = g_0^2 g_1^2$ und γ_1 mitbestimmt, indem r mit abnehmender Amplitude und zunehmenden Genauigkeitsansprüchen wächst.

Der hier aus den allgemeinen Beschränkungen (1) berechnete Stoßparameter r unterscheidet sich wesentlich von anderweitigen Resultaten [20], [12], [13], wo die DEBYE-Länge l_D selbst als Stoßparameter empfohlen wird. Der Unterschied ist nicht nur ein quantitativer — was wegen der erwähnten unvermeidlichen Willkür nicht so erstaunlich wäre — sondern er erstreckt sich auch auf die Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern, wie von der Dichte, der Temperatur und insbesondere der Amplitude g_1 des Vorganges. Während nämlich nach [20], [12], [13] der Stoßparameter mit der Wurzel aus der Temperatur zu- und umgekehrt zur Wurzel aus der Dichte abnimmt, ist nach der vorliegenden Formulierung der Stoßparameter in dem Bereich normaler Trägerdichte von der Konzentration überhaupt unabhängig ($\alpha = \text{const.}$ und nimmt umgekehrt zur Temperatur ab. Bei Plasmen sehr hoher Trägerdichte dagegen sinkt r , umgekehrt mit der dritten Wurzel aus der Dichte, wohingegen die Temperatur keinen Einfluß mehr ausübt. Eine Einwirkung der Amplitude auf r wäre nach [20], [12], [13] überhaupt nicht zu erwarten, während nach unseren Überlegungen in allen Dichtebereichen der Stoßparameter mit abnehmendem g_1 rasch anwächst. Man kann sich überlegen, daß die hier hergeleiteten Resultate auch anschaulich verständlich sind. Gerade die letztgenannte Abhängigkeit von der Amplitude g_1 ist besonders einleuchtend, da die Bedeutung eines Stoßes als Störung des geordneten Vorganges nicht lediglich von der Dauer seiner Einwirkung abhängen kann, sondern von dem Verhältnis der Stärke seiner Einwirkung zu der im gleichen Aufpunkt resultierenden kollektiven Wechselwirkungskomponente her beurteilt werden muß.

Die Abweichungen der zitierten Ergebnisse [20] dürften ihre Ursache in der allzu primitiven Definition des Stoßbegriffes haben. Die Berechnungen a. a. O. leiten ihr Resultat nämlich aus der Forderung her, daß die Wechselwirkung zweier Teilchen dann als Stoß aufgefaßt werden soll, wenn die Dauer der Wechselwirkung kleiner als die Schwingungsdauer des Vorganges ist. Diese sehr einfache Vorstellung kann keine zuverlässige Definition liefern, da sie das einzelne Teilchen aus dem Verband der übrigen Träger herauslöst und die gleichzeitige Einwirkung aller Individuen während des Zeitintervalles $\Delta_m t$ unberücksichtigt läßt. Damit wird aber der wesentlichste Gesichtspunkt kollektiver Wirkung überhaupt vernachlässigt und es ist nicht verwunderlich, daß nach der hier gegebenen genaueren Formulierung Träger des in [20] definierten Stoßbereiches noch durchaus kollektives Verhalten zeigen können.

Andererseits ist es aber auch nicht möglich, die DEBYESche Länge als Stoßparameter mit dem Hinweis einzuführen, daß die geordnete kollektive Bewegung des Plasmas zusammenbricht, wenn die charakteristische Länge des Vorganges (Wellenlänge) die DEBYE-Länge unterschreitet [12], [13]. Letzteres soll keineswegs in Abrede gestellt werden, sondern ergibt sich auch aus den vorliegenden Untersuchungen an Hand der Bedingungen (2). Wir haben aber in I ausführlich diskutiert — und die Gln. (1) bzw. (2) demonstrieren dies auch — daß die Grenzen des D-Modelles hinsichtlich der inneren Wechselwirkung einerseits und der Trägerkinetik andererseits keineswegs die gleichen sind, so daß eine Identifizierung der ersteren mit den letzteren unzulässig sein muß.

Die Zahl der Träger im Inneren des Stoßbereiches bezeichnen wir mit N_s . Die Formeln (5a) bzw. (5c) und (5d) lassen erkennen, wie N_s mit zunehmendem γ_1 und α , d. h. mit zunehmenden Genauigkeitsansprüchen und abnehmender Amplitude des kollektiven Vorganges rasch anwächst. Auch mit der Dichte ϱ nimmt N_s zunächst zu, um sich später bei sehr hohen Trägerkonzentrationen einem festen Grenzwert anzunähern. Je nach der Größe von γ_1 und α , der Dichte und der Temperatur enthält die Stoßzone also eine mehr oder weniger große Zahl von Trägern.

Dies bedeutet, daß die Berechnung der Stoßprozesse grundsätzlich die Methoden des Mehrfachstoßes erfordert und die Verwendung des Zweierstoßes für die Berechnung der individuellen Komponente von zweifelhaftem Wert ist, obschon der wesentliche Anteil sicher von dem aufpunktnächsten Träger herrührt. Berechnen wir die effektive Wechselwirkung K_s aller Teilchen der Stoßzone mit dem Träger im Aufpunkt nach den Gesetzen der Überlagerung statistischer Schwankungen, so gilt

$$K_s^2 = \frac{e^4}{a^{2m}} \cdot \alpha, \quad (6a)$$

wo α den Zahlfaktor

$$\alpha = \frac{3}{2m-3} \left(\left(\frac{a}{a_0} \right)^{2m-3} - 1 - \sum_{i=2}^{N_s} \left(\frac{1}{(i-1)^3} - \frac{1}{i^{2m-1}} \right) \right) \quad (6b)$$

angibt. a_0 ist der kleinste Abstand, auf den sich Teilchen der mittleren thermischen Energie annähern können. Es gilt

$$a_0 = (e^2 / (m-1) k T)^{1/(m-1)}. \quad (6c)$$

Der kollektive Anteil K_k ergibt sich aus der Integration über die Ladungsverteilung ϱ . Bezeichnet $\varrho_1 = \varrho - \varrho_0$ die Abweichung von der räumlichen Gleichverteilung ϱ_0 , so ist dieser Beitrag einfach durch das Integral

$$K_k = \left\langle \int_{r_s}^{\infty} \frac{e^2 \cdot \varrho_1(r_i)}{r_i^{m+1}} r_i dV_r \right\rangle \quad (7)$$

gegeben und wir erhalten für das gesuchte Verhältnis des individuellen zum kollektiven Wechselwirkungsanteil

$$\frac{K_i}{K_K} = \left\langle \frac{\sqrt{\alpha}}{a^m} \left/ \int_{r_s}^{\infty} \frac{\varrho_1(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}_i dV_{\mathbf{r}}}{r_i^{m+1}} \right. \right\rangle \quad (8a)$$

mit α nach Gl. (6b, c) und r_s nach Gl. (5a, b, c, d). Diese Formel läßt sich ohne Bezugnahme auf einen speziellen Vorgang ϱ_1 nicht weiter vereinfachen.

Mit Gl. (8a) können wir das Kriterium für die Gültigkeit der VLASOVschen Näherung angeben. Betrachten wir den Ablauf eines beliebigen Vorganges $\varrho(\mathbf{r}, t)$, so läßt sich dieser Vorgang dann ausreichend mit Hilfe der VLASOVschen Näherung erfassen, wenn für alle Aufpunkte des Systems, die zu irgendeiner Zeit wesentlich auf den Ablauf des Vorganges einwirken, während eben dieser Zeit die Bedingung

$$\frac{K_s}{K_K} = \left\langle \frac{\sqrt{\alpha}}{a^m} \left/ \int_{r_s}^{\infty} \frac{\varrho_1(\mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i dV_{\mathbf{r}}}{r_i^{m+1}} \right. \right\rangle \ll 1 \quad (8b)$$

erfüllt ist.

Dieses Kriterium für die Anwendbarkeit der VLASOVschen Näherung ist ersichtlich recht verwickelt und sicher nicht durch einfache Aussagen über das Verhältnis DEBYE-Länge/Relaxationsstrecke, DEBYE-Länge/Wellenlänge, Schwingungsfrequenz/freie Flugdauer oder Schwingungsfrequenz/Relaxationszeit zu ersetzen [11, 12, 20]. Die Unzulänglichkeit solcher Festsetzungen demonstriert besonders deutlich die starke Abhängigkeit der Größe K/K_K von der Amplitude ϱ_1 , die bei den soeben zitierten Kriterien völlig unberücksichtigt bleibt. Wir haben dabei zu beachten, daß ϱ_1 das Verhältnis K/K_K nicht nur über den Integranden, sondern wegen (4a) auch über die Grenze r in entscheidender Weise beeinflusst.

Das Kriterium $K/K_K \ll 1$ führt außerdem noch einmal klar vor Augen, wieso die Bedingung $\lambda \gg l_D$ (λ = Wellenlänge der Schwingung), wie sie an anderer Stelle [12, 13, 20] als Forderung für die Anwendbarkeit kollektiver Beschreibung angegeben wurde, nur notwendigen Charakter haben kann. Nach Gl. (8a) kann nämlich das geordnete kollektive Verhalten auch oberhalb der DEBYE-Länge ($\lambda \gg l_D$) durchaus zusammenbrechen, sofern nur die Amplitude des Vorganges ϱ_1 eine gewisse Grenze unterschreitet.

Auch die Dichteabhängigkeit von K/K_K liefert uns eine wichtige Kenntnis. Da die DEBYE-Länge l_D mit zunehmender Dichte abnimmt, ist an anderer Stelle [12, 13] geschlossen worden, daß die Erhöhung der Trägerdichte das kollektive Verhalten begünstigt. Nach der Bedingung (8) kann diese Behauptung jedoch nur beschränkte Gültigkeit

haben. Mit zunehmender Dichte nimmt nämlich der Zähler von (8) zu. Die Änderung des Nenners hängt von ϱ_1 ab. Variiert ϱ_1 und damit auch der Nenner in (8) proportional zu ϱ_0 , so nimmt K_s/K_K mit zunehmender Dichte ab und das kollektive Verhalten wird unter diesen Umständen tatsächlich im Sinne [12, 13] gefördert. Wie gesagt – dies setzt voraus, daß $\varrho_1 \sim \varrho_0$ variiert. Halten wir dagegen das Potential und damit die Dichte ϱ_1 konstant, so verkleinert die Konzentrationszunahme den Nenner indem r_s gemäß (5c) mit wachsendem ϱ_0 zunimmt. In diesem wichtigen Fall konstanten Potentials bewirkt also die Erhöhung der Dichte gerade den umgekehrten Effekt, nämlich eine Begünstigung der individuellen Komponente, im Gegensatz zu der zitierten Aussage.

Auch die Bedeutung der Reichweite der Zwischenkräfte lassen die Beziehungen (8) und (6b) klar erkennen. In der Formel (6b) verlieren mit wachsendem m die Glieder der Summe gegenüber dem ersten Glied der Klammer mehr und mehr an Bedeutung, was die Tatsache widerspiegelt, daß mit abnehmender Reichweite die Wechselwirkung sich auf das aufpunktnächste Teilchen konzentriert. Im übrigen nimmt das Verhältnis K_s/K_K mit m rasch zu. Dies hat zwei Gründe. Erstens nimmt r_s mit m zu und zweitens wirkt sich die Potenz im Nenner r^m des Integranden stark aus. Die Zunahme von K_s/K_K mit m bestätigt formelmäßig die wohlbekannte Tatsache, daß die VLASOVsche Näherung keine brauchbare Basis zur Berechnung der Wechselwirkung von Gesamtheiten mit kurzreichweitigen Zwischenkräften ist.

Wenn wir uns jetzt, nach dieser Diskussion des Gleichungssystems (1), den Bedingungen (2) zuwenden, so sehen wir, daß hierzu die Kenntnis der Orts-Zeitabhängigkeit der BOLTZMANN-Funktion f notwendige Voraussetzung ist. Die Funktion f ist jedoch zunächst nicht bekannt. Wir werden daher zur Behandlung dieses Fragenkomplexes folgendermaßen verfahren.

Zunächst machen wir, so wie dies an sich allgemein üblich ist, die Annahme, daß die Trärgesamtheit zu allen Zeiten und in allen Gebieten des Phasenraumes durch das D-Modell befriedigend repräsentiert werden kann. Dann läßt sich f an Hand der BOLTZMANNschen Fundamentalgleichung unter Verwendung der VLASOVschen Näherung berechnen. Auf die so gefundene Größe f wenden wir die Bedingungen (2) an. Sind diese allenthalben befriedigt, so dürfen wir f als brauchbare Beschreibung unseres Ensembles ansehen.

Sind jedoch die Forderungen (2) in bestimmten Gebieten des Phasenraumes zu bestimmten Zeiten nicht befriedigt (individuelle Bereiche), so müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Entweder die individuellen Zonen üben auf die Berechnung der Dichtefunktion in anderen, kollektiven Bereichen einen wesentlichen Einfluß aus, dann ist die so bestimmte Verteilungsfunktion in allen Gebieten des Phasenraumes von

zweifelhaftem Wert und eine Neuberechnung auf erweiterter Basis wird erforderlich. Oder aber — und dies ist der weitaus günstigere Fall — die Träger in den individuellen Zonen üben nur einen untergeordneten Einfluß auf die übrigen kollektiven Gebiete aus. Dann ist es lediglich notwendig, die entsprechenden Träger von der kollektiven Beschreibung auszuschließen, unter Berücksichtigung ihres Teilchencharakters zu berechnen und der restlichen Gesamtheit, die durch die Funktion f in diesem Fall befriedigend beschrieben wird, zu überlagern.

Betrachten wir entsprechend dem Gebrauch in der Substitutionsanalyse einen Vorgang der Orts-Zeitabhängigkeit $\exp i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, so erhalten wir an Hand der BOLTZMANNschen Fundamentalgleichung für die Verteilungsfunktion f die Beziehung

$$f = f_0 + f_1 = f_0 + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0 / \partial c_k}{1 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{c})}{\omega}} \cdot g(\mathbf{k}) \cdot \exp i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (9a)$$

wo f_0 die Gleichgewichtsverteilung, c_k die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung \mathbf{k} und $g(\mathbf{k})$ durch

$$g(\mathbf{k}) = \text{const} \cdot 4\pi e^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^{m-1}} \frac{\sin kx}{x} dx \quad (9b)$$

als Funktion des Ausbreitungsvektors gegeben ist [11].

Auf diese Funktion (9) müssen wir jetzt die Bedingungen (2) anwenden. Dies führt zu einer ganzen Zahl von beschränkenden Aussagen, die wir hier nicht alle diskutieren können. Wir greifen nur das Ergebnis heraus, welches im Hinblick auf die in I geschilderten Divergenzschwierigkeiten von Interesse ist. Die Bedingungen (2b), (2f) und (2h) zeigen zusammen mit (3), daß die Volumenelemente ΔV_r der Einteilung des Geschwindigkeitsraumes mit der Annäherung an die Ebene $\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_r\} = \omega$ gegen Null streben müssen. Gleichzeitig verlangen die Forderungen (2b), (2f) und (2h) mit (3), daß ΔV_r eine gewisse endliche Größe (charakterisiert durch l^3 , wenn l die typische Länge des Vorgangs bezeichnet), nicht unterschreitet¹. Damit müssen dann die Volumenelemente $\Delta \tau = \Delta V_r \cdot \Delta V_v$ der Phasenraumeinteilung ebenfalls gegen Null streben, wenn sich die Geschwindigkeit v des Aufpunktes \mathbf{r} , v der Ebene $\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_r\} = \omega$ annähert.

Andererseits ist die Gültigkeit kollektiver Beschreibung aber auch an die Erfüllung der Voraussetzungen (2k) und (2m) gebunden, die eine

¹ In dem idealisierten Fall einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle könnte man auf den Gedanken kommen, daß wegen der seitlich unbegrenzten Ausdehnung ΔV_r beliebig groß werden könne. Dem läßt sich entgegenhalten, daß dies durch die endlichen Randbedingungen jeder wirklichen Anordnung verhindert wird. Insbesondere aber legt die durch die Bedingung (2c) bewirkte Kopplung an das Gleichungssystem (1) auch im Fall einer ebenen Welle ohne seitliche Begrenzung ΔV_r auf den Bereich $\langle \Delta V_r \rangle < \langle l^3 \rangle$ fest.

gewisse Mindestteilchenzahl $f \Delta \tau$ vorschreiben. Dabei ist folgendes zu beachten. Ganz analog zu den Verhältnissen bei der Stoßzone ist auch hier die gegenseitige Abgrenzung der individuellen und kollektiven Bereiche der gaskinetischen Beschreibung keineswegs scharf, sondern stetig. Wir können daher auch hier die Begrenzung der Zonen nur innerhalb eines gewissen Spielraumes angeben, der durch unsere Wertung des \gg -Zeichens in (2k, m) bestimmt ist. Kennzeichnen wir die Grenze durch diejenigen Volumenelemente $\Delta \tau_u$, deren individuelle kinetische Komponente sich zu der kollektiven wie $1 : \gamma_2$ verhält, so finden wir aus (2m) und (2k) mit $f = f_1 + f_0$ die Grenzbedingung

$$\sqrt{f \cdot \Delta \tau_u} \cdot \left(1 + \frac{t_c}{\Delta t}\right) = \gamma_2 \quad (10a)$$

oder

$$\sqrt{f \cdot \Delta \tau_u} \cdot \left(1 + \frac{\Delta_m t}{T}\right) = \gamma_2. \quad (10b)$$

Wenn wir wieder berücksichtigen, daß nur derjenige Anteil der kollektiven Komponente, der wirklich in die kinetischen Grundgleichungen eingeht, in Rechnung zu setzen ist, so müssen wir auch hier wie bei der Untersuchung der Stoßzone an Stelle von (10) die Beziehungen

$$\sqrt{f \cdot \Delta \tau_u} \cdot \left(1 + \frac{t_c}{\Delta t}\right) = \gamma_2 \frac{f_0}{f_1}, \quad (11a)$$

bzw.

$$\sqrt{f \cdot \Delta \tau_u} \cdot \left(1 + \frac{\Delta_m t}{T}\right) = \gamma_2 \frac{f_0}{f_1} \quad (11b)$$

verwenden, da die kollektiven Anteile der Gleichverteilung f_0 sich im Gegensatz zu f_1 aus den kinetischen Grundgleichungen herausheben. Zur individuellen Komponente trägt f_0 dagegen in unveränderter Form bei.

Da $f \sim f_0$ einen bestimmten endlichen Wert besitzt, verlangen die Gln. (10) für die einzelnen Volumenelemente eine bestimmte Mindestausdehnung $\Delta \tau_u$. Da nun aber andererseits — wie wir oben sahen — $\Delta \tau \rightarrow 0$ für $c_k \rightarrow c_{kw}$ gilt, so bedeutet die Existenz von $\Delta \tau_u$ nichts anderes, als daß eine gewisse ε -Schicht in der Umgebung der Ebene ($\mathfrak{f} c_w$) — ω von der kollektiven Behandlung auszuschließen ist. Die Ausdehnung dieser ε -Zone wird durch die Bedingung

$$c_{ku} - c_{kw} = \varepsilon \quad (12)$$

festgelegt, wenn c_{ku} die Geschwindigkeitskomponente bezeichnet, für die $\Delta \tau$ den Mindestwert $\Delta \tau_u$ — definiert durch die Gl. (11) — erreicht.

Der ε -Bereich ist ebenso als individuelle Zone aufzufassen, wie die vorher diskutierte Stoßzone r_s . Wie diese ist auch die Ausdehnung des ε -Bereiches gemäß Gl. (11) von der Amplitude f_1 abhängig. Damit haben wir folgende Aussage gewonnen.

In der Umgebung der Ebene $(c_w \mathbf{f}) = \omega$ ist ein gewisser ε -Bereich als individuelle Zone von der kollektiven Beschreibung auszuschließen. Diese Ausschlußzone besitzt, im Gegensatz zu der aus Gründen der Linearität geforderten „cut-out-region“ (19, s. auch I), eine gewisse Mindestausdehnung und nimmt mit abnehmender Amplitude des kollektiven Vorganges zu, während sie nach den zitierten Überlegungen abnehmen sollte. Das letzte Ergebnis ist besonders einleuchtend, da man erwarten wird, daß der Einfluß der individuellen Schwankungen an Bedeutung gewinnt, wenn die kollektive Komponente verkleinert wird.

Die hier als „individuelle Zone“ gekennzeichnete Ausschlußzone vermeidet die in I diskutierten Schwierigkeiten bezüglich der Dispersionsgesetze. Die Divergenzen entfallen und die Gl. (2a', I) läßt sich durch einfache partielle Integration in [(2b), I] überführen.

Es sei nur vermerkt, daß der ε -Bereich nicht die einzige Zone des Geschwindigkeitsraumes ist, die keine kollektive kinetische Beschreibung erlaubt. Wegen der exponentiell abfallenden Besetzungsdichte der Zellen hoher Geschwindigkeit können die Bedingungen (2) auch jenseits einer gewissen Grenzgeschwindigkeit c_g nicht mehr erfüllt werden. Die kollektive Beschreibung ist daher bereits auf eine Maximalgeschwindigkeit c_g unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, deren Bedeutung an anderer Stelle [9] hervorgehoben wurde, beschränkt.

Werfen wir schließlich noch einen Blick auf die ebenfalls in I herausgestellten Unterschiede zwischen den Ergebnissen der verschiedenen mathematischen Verfahren (Substitutionsanalysis-LAPLACE-Transformation). Die Resultate der Substitutionsanalysis sind in [I, (2)] wiedergegeben.

Bei der Berechnung unter Verwendung der LAPLACE-Transformation betrachten wir im Anschluß an LANDAU einen Vorgang der Ortsabhängigkeit $\exp i k x$ und unterwerfen die lineare Näherung f_1 der BOLZMANN-Funktion und das elektrische Potential Φ hinsichtlich der Zeitabhängigkeit einer LAPLACE-Transformation

$$f_{1\eta} = \int_0^\infty e^{-\eta t} f_1 dt; \quad \Phi_\eta = \int_0^\infty e^{-\eta t} \Phi dt \quad (13)$$

mit den Umkehrungen

$$f_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \rho}^{+\infty + \rho} f_{1\eta} e^{\eta t} d\eta; \quad \Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \rho}^{+\infty + \rho} \Phi_\eta e^{\eta t} d\eta, \quad (14)$$

wo ρ einen beliebigen reellen Parameter bezeichnet, der jedoch so gewählt sein muß, daß er größer ist, als die Realteile aller Singularitäten der Transformierten. Für Φ_η erhält man dann aus der linearen Näherung der BOLZMANN-Gleichung und der POISSONschen Gleichung die folgende

LAPLACE-Transformierte des Potentials

$$\Phi_c = \frac{4\pi e^2}{k^2} \cdot \int_{-\infty}^{(c)} \frac{f_1(c, t=0) \cdot dV_c}{\{\eta + i(\mathfrak{f}c)\}} \quad (15)$$

$$1 - \frac{4\pi \cdot i \cdot e^2}{k \cdot m} \cdot \int_{-\infty}^{(c)} \frac{\partial f_0}{\partial c_k} \frac{dV_c}{\{\eta + i(\mathfrak{f}c)\}}$$

Verwenden wir in dieser Funktion Φ_c — entsprechend dem allgemeinen Gebrauch — für f_0 eine kontinuierliche Dichteverteilung (beispielsweise die MAXWELL-Verteilung), so erkennt man sofort, daß Φ_η eine komplexe Funktion ist, die neben außerwesentlichen Singularitäten eine einfache Mannigfaltigkeit wesentlicher Singularitäten auf der imaginären Achse der η -Ebene besitzt. Diese Tatsache bereitet natürlich, rein mathematisch gesehen, bei der Rücktransformation Schwierigkeiten, die sich jedoch nach 9 und 27 durch Einführung geeigneter Schnitte bzw. analytische Fortsetzung überwinden lassen. Beide Verfahren ergeben unterschiedliche Zusatzglieder zu den an Hand der Substitutionsanalysis gewonnenen Dispersionsgesetzen.

Auch diese viel diskutierten Differenzen zwischen den Ergebnissen der Substitutionsmethode und der LAPLACE-Transformation erscheinen in anderem Licht, wenn wir den Grenzen kollektiver Beschreibung die gebührende Beachtung schenken.

In I konnten wir nämlich als einen der wesentlichsten Gesichtspunkte die Tatsache herausstellen, daß auch in denjenigen Bereichen, in denen kollektive Beschreibung grundsätzlich möglich ist, der Begriff der Dichtefunktion f nur in dem seiner Definition entsprechenden beschränkten Sinn verwendet werden darf. Das soll bedeuten — wenn wir von einer Teilchendichte $q \cdot 1V_c = f \cdot 1V_c$ sprechen, wo der „einheitliche Bereich“ ΔV_c der Bedingung

$$\Delta V_{cu} < \Delta V_c < \Delta V_{c0} \quad (16)$$

genügt (s. I), so hat dies einen wohldefinierten Sinn. $q \cdot (1V_c)$ gibt die Zahl der Träger pro Volumeneinheit des geometrischen Raumes an, deren Geschwindigkeiten in das Gebiet $1V_c$ fallen. In guter Übereinstimmung mit der Wirklichkeit beschreibt $q \cdot (1V_c)$ einen Teilchenstrom der mittleren Geschwindigkeit \bar{c} , welche dem Volumenelement $1V_c$ zugeordnet ist. Gehen wir dagegen — ungerechtfertigterweise — zu der infinitesimalen Größe $dq = f \cdot dV_c$ über, so haben wir damit f in einem definitionsfremden Sinn verwendet. $f \cdot (dV_c)$ beschreibt auch jetzt die Dichte eines räumlichen Teilchenstromes der Geschwindigkeit c , aber diese Beschreibung ist der zugeordneten Wirklichkeit völlig unangemessen, — und zwar aus einem einleuchtenden Grunde. Eine solche Beschreibung würde nämlich die Qualitäten eines einzelnen punktförmigen Trägers oder — besser sogar — die Qualitäten von Bruchteilen eines solchen Trägers so behandeln, als

seien sie über den ganzen Raum nach Maßgabe der Dichte verschmiert. Die Unmöglichkeit einer solchen Beschreibung, deren Unzulänglichkeit anschaulich evident ist, kommt formelmäßig in dem Widerspruch der Beziehung

$$dV_c < \Delta V_{c_u} \quad (17)$$

zu der Bedingung (16) zum Ausdruck.

Diese Aussage enthält eine wichtige Konsequenz für die Modellvorstellung, welche wir einer Gesamtheit in thermisch ungeordneter Bewegung, beispielsweise einem Plasma, zugrunde legen können. Sie zeigt nämlich, daß das angemessene Plasmamodell, auf welches wir die kollektive Beschreibung anwenden können, nicht eine kontinuierliche Verteilung von Teilchenströmen infinitesimaler Dichte, sondern vielmehr eine endliche Zahl von Trägerströmen endlicher Dichte ist, denen jeweils eine geeignete mittlere Geschwindigkeit zugeordnet werden kann.

Aus den genannten Gründen ist die Verwendung infinitesimaler Volumenelemente selbstverständlich auch in der Beziehung (15) nicht erlaubt, sondern die Integrationen über den Geschwindigkeitsraum sind gemäß

$$\int^{(c)} G(c, r, t) dV_c = \sum G(\bar{c}_r, r, t) \Delta V_{c_r} \quad (18)$$

durch Summationen über eine Volumeneinteilung ΔV_{c_r} zu ersetzen, deren Elemente der Bedingung (16) genügen. Individuelle Bereiche, wie beispielsweise die ε -Zone und $c = c_u$ sind dabei natürlich auszuschließen. Den in (18) formulierten Übergang können wir vollziehen, indem wir in (15) die Funktionen f_1 und f_0 vor der Integration mit dem Faktor

$$\sum \delta(\bar{c}_r - c) \cdot \Delta V_{c_r} \quad (19)$$

multiplizieren, wenn δ die bekannte DIRAC-Funktion kennzeichnet. Unter diesen Umständen entfallen die wesentlichen Singularitäten von Φ_η und die LAPLACE-Transformierte wird eine meromorphe Funktion. Zur Ausführung der Rücktransformation ergänzen wir jetzt den Integrationsweg in (14) zu einer geschlossenen Kontur, indem wir die Integration in einem links gelagerten Halbkreis von $+i\infty + p$ nach $-i\infty + p$ zurückführen. Da $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi_\eta = 0$ gilt, muß sich die Funktion $\Phi_\eta(r, t)$ gemäß JORDANS Lemma als die Summe der Polresiduen der Funktion $\Phi_\eta \cdot e^{\eta t}$ darstellen. Diese Residuen enthalten alle neben einem konstanten Faktor, welcher durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist, den orts-zeitabhängigen Anteil $\exp i(\omega t + \mathfrak{f}r)$, wenn wir die Polstellen durch $\eta_0 = i\omega$ kennzeichnen. Für die Zuordnung zwischen ω und \mathfrak{f} liefert die Rücktransformation das Dispersionsgesetz in völliger Übereinstimmung mit der Substitutionsanalysis.

Selbstverständlich ist es möglich, aus Gründen der Zweckmäßigkeit hier oder auch an anderer Stelle innerhalb der kollektiven Bereiche zu kontinuierlicher Beschreibung überzugehen. Man hat jedoch dabei zu beachten, daß dieser Übergang die physikalischen Konsequenzen nicht beeinflußt, da entsprechende Änderungen zwar dem fiktiven D-Modell eigen wären, aber nicht der physikalischen Wirklichkeit entsprechen.

In diesem Sinne haben die in 9 und 27 aufgezeigten Differenzen zwischen den Ergebnissen der LAPLACE-Transformation einerseits und der Substitutionsanalysis andererseits zwar Interesse bezüglich des D-Modelles, besitzen jedoch keine physikalische Realität.

Herrn Professor K. G. EMELEUS möchte ich für sein Interesse und seinen Kommentar zu den vorliegenden Untersuchungen danken. Der Royal Society und der Queen's University Belfast gebührt mein Dank für ihre freundliche Emladung, die meinen Aufenthalt in Belfast ermöglichte.

Literatur.

- [1] HAHN, W. C.: Gen. Electr. Rev. **42**, 258 (1939). — [2] HAEFF, A. V.: Phys. Rev. **74**, 1532 (1948). — [3] PIERCE, J. R.: J. Appl. Phys. **19**, 231 (1948). — [4] PIERCE, J. R.: J. Appl. Phys. **20**, 1060 (1949). — [5] PIERCE, J. R.: J. Appl. Phys. **21**, 1063 (1950). — [6] GABOR, D.: Brit. J. Appl. Physics **2**, 209 (1951). — [7] KENT, G.: J. Appl. Phys. **25**, 32 (1954). — [8] TWISS, R. Q.: Proc. Phys. Soc. **64**, 654 (1951). — [9] TWISS, R. Q.: Phys. Rev. **88**, 1392 (1952). — [10] VLASOV, A.: J. exp. theoret. Phys. **8**, 291 (1938). — [11] VLASOV, A.: J. of Phys. **10**, 25 (1945). — [12] BOHM, D., and D. PINES: Phys. Rev. **82**, 625 (1951). — [13] BOHM, D., and D. PINES: Phys. Rev. **85**, 338 (1952). — [14] BOHM, D., and D. PINES: Phys. Rev. **92**, 609 (1953). — [15] LINDER, E. G.: Phys. Rev. **49**, 753 (1936). — [16] THOMSON, J. J., and G. P. THOMSON: Conduction of Electricity in Gases, Bd. 2, S. 353. London: Cambridge Univ. Press 1933. — [17] TWISS, R. Q.: Phys. Rev. **80**, 767 (1950). — [18] TWISS, R. Q.: Phys. Rev. **84**, 448 (1951). — [19] BOHM, D., and E. P. GROSS: Phys. Rev. **75**, 1850 (1949). — [20] BOHM, D., and E. P. GROSS: Phys. Rev. **75**, 1865 (1949). — [21] BOHM, D., and E. P. GROSS: Phys. Rev. **79**, 993 (1950). — [22] BAILEY, V. A.: J. Roy. Soc. of New South Wales **82**, 107 (1948). — [23] BAILEY, V. A.: Nature, Lond. **161**, 599 (1948). — [24] BAILEY, V. A.: Phys. Rev. **75**, 1104 (1949). — [25] BAILEY, V. A.: Phys. Rev. **78**, 428 (1950). — [26] BAILEY, V. A.: Phys. Rev. **83**, 439 (1951). — [27] LANDAU, L.: J. of Phys. **10**, 25 (1946). — [28] GROSS, E. P.: Phys. Rev. **82**, 232 (1951). — [29] BHATNAGAR, P. L., E. P. GROSS and M. CROOK: Phys. Rev. **94**, 511 (1954).

Belfast, Queen's University, Department of Physics¹.

¹ Jetzige Anschrift: Institut für Theoretische Physik der Universität Bonn.

Die Polarisation des Lichtes durch asphärische, ferromagnetische Teilchen in einem homogenen Magnetfeld.

II. Theorie.

Von

E. FICK.

Mit 11 Figuren im Text.

(Eingegangen am 4. November 1954.)

Es wird das optischen Verhalten einer Wolke ferromagnetischer, ellipsoidaler Teilchen untersucht, die in einem äußeren, homogenen Magnetfeld eine statistische Orientierung erfahren, wobei beliebige Feldstärken relativ zu der der Ausrichtung entgegenwirkenden Temperatur zugelassen werden. Die dadurch hervorgerufene optische Anisotropie der Rauchwolke wird durch Berechnung des mittleren, komplexen Brechungsindex beschrieben, wobei die Ellipsoide als klein gegen die Lichtwellenlänge angenommen werden. Das von diesen Teilchen gestreute Licht ist eine Funktion des angelegten Magnetfeldes. Die Richtungsabhängigkeit und Polarisation der Streustrahlung wird diskutiert. Die anisotrope Absorption — bedingt durch Erzeugung JOULEscher Wärme im Teilchen und Lichtstreuung — liefert die Polarisation des senkrecht zum Feld durchgehenden Lichtes. Durch Kombination von theoretisch und experimentell gewonnenen Ergebnissen läßt sich aus der astronomisch beobachteten Polarisation des Sternlichtes die Stärke des galaktischen Magnetfeldes abschätzen. Je nach den zugrunde gelegten ferromagnetischen Materialkonstanten des interstellaren Rauches gelangt man zu Feldstärken, die in dem Intervall $7,5 \cdot 10^{-6} \geq H_{\text{gal}} \geq 6 \cdot 10^{-4}$ Oe liegen.

I. Einleitung.

Im ersten, experimentellen Teil dieser Arbeit [3]¹ wurde gezeigt, daß unpolarisiertes Licht beim Durchgang durch ferromagnetischen Rauch aus $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ eine partielle lineare Polarisation erfährt, wenn ein statisches Magnetfeld senkrecht zur Lichtrichtung angelegt wird. Dieser Effekt beruht auf einer Ausrichtung kugelförmiger Teilchen in die Feldrichtung und kann als ein Modell zur Polarisation des Sternlichtes durch interstellare Materie angesehen werden.

In den folgenden theoretischen Untersuchungen über diesen Polarisationsseffekt approximieren wir die Gestalt der Teilchen durch gestreckte Rotationsellipsoide, um die in ihrem Inneren herrschende magnetostatische bzw. elektrisch-optische Feldstärke berechnen zu können. Das ferromagnetische Verhalten der Partikel wird durch ein permanentes Moment parallel zur großen Teilchenachse und durch ein

¹ Diese erste Veröffentlichung wollen wir künftig kurz mit I bezeichnen.

vom äußeren Magnetfeld induziertes Moment beschrieben. Durch die Berücksichtigung der Suszeptibilität ist unsere Theorie weiter gefaßt als eine kürzlich erschienene Arbeit von L. SPITZER und J. W. TUKEY [2] über die Polarisation des Sternlichtes. In optischer Hinsicht werden die Partikel, mangels einer exakten Beugungstheorie an beliebig großen Ellipsoiden, als klein gegenüber der Lichtwellenlänge angenommen. Die wegen der asphärischen Gestalt vorhandene Formanisotropie der Teilchen äußert sich durch die magnetische Ausrichtung in einer optischen Anisotropie der Rauchwolke. Die verschiedene Absorption parallel und senkrecht zum äußeren Feld verursacht die Polarisation des durchgehenden Lichtes. Es wird daher der komplexe Brechungsindex der Teilchenwolke, dessen Imaginarteil konsumptive Absorption liefert, und das Streulicht, das konservative Absorption veranlaßt, in Abhängigkeit vom orientierenden Magnetfeld bestimmt. Wir bedienen uns dabei einer von M. BORN [2] stammenden invariantentheoretischen Methode der Behandlung der durch äußere Felder erzwungenen Anisotropie. Während bei der Berechnung des COTTON-MOUTON- bzw. MAJORANA-Effektes [2, 6] nur eine geringe Ausrichtung der Moleküle bzw. der kolloidalen Teilchen durch das Magnetfeld vorausgesetzt wird, gilt unsere Theorie für beliebige Feldstärken relativ zu der der Orientierung entgegenwirkenden Temperatur, so daß auch die Sättigung der Polarisation mit zunehmender Feldstärke, wie sie in I beobachtet wurde, erfaßt wird. Andererseits umfaßt natürlich die vorliegende Theorie die Ergebnisse von R. GANS [4] über Absorption und Streuung des Lichtes an Rotationsellipsoiden ohne Vorzugsrichtung als Spezialfälle.

Während die magnetische Abhängigkeit des Vorganges mit den experimentellen Untersuchungen quantitativ übereinstimmt, können wir nicht erwarten, daß sich die Größe der Polarisation aus der Theorie berechnen läßt, da in optischer Hinsicht unsere Theorie auf Teilchen beschränkt ist, die kleiner als die Lichtwellenlänge sind, im Experiment aber Partikel von der gleichen Größenordnung und sogar etwas größer vorlagen. L. SPITZER und J. W. TUKEY müssen zur Festlegung der optischen Eigenschaften von Teilchen mit ungefähren Dimensionen der Lichtwellenlängen zu mehr oder weniger willkürlichen Annahmen greifen. Durch Heranziehen unserer experimentellen Ergebnisse gelingt es jedoch das optische Verhalten von Partikeln mit solchen Abmessungen zu erfassen und schließlich eine Abschätzung der galaktischen magnetischen Feldstärke zu erreichen.

2. Orientierung eines Teilchens im Magnetfeld.

Wir wollen die Energie eines ferromagnetischen Teilchens, das sich in einem durch einen elektrischen Strom hervorgerufenen Magnetfeld

befindet, bestimmen. Dazu werde das magnetische Verhalten durch die Zustandsgleichung

$$\mathfrak{M} = \chi \mathfrak{H} + \mathfrak{M}_p \quad (1)$$

(χ = reversible Suszeptibilität; \mathfrak{M}_p = permanente oder „wahre“ Magnetisierung) beschrieben. Dieser lineare Ansatz ist erlaubt, solange man wesentlich kleinere Feldstärken betrachtet, als zur vollen Aussteuerung der Hysteresisschleife nötig sind (reversible Änderungen). Es ist dies bei unserem Problem sicher der Fall. Wenn wir die Induktion \mathfrak{B} einführen

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M} \quad (2)$$

erhalten wir an Stelle von Gl. (1)

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{B}_p \quad \text{mit} \quad \mu = 4\pi\chi + 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_p = 4\pi \mathfrak{M}_p. \quad (3)$$

Es ist zweckmäßig, das Feld \mathfrak{H} in irgendeinem Raumpunkt zu zerlegen in: $\mathfrak{H}^{(0)}$ = das Feld, welches vom Strom allein bei Abwesenheit magnetisierbarer Substanz und permanentem Magnetismus erzeugt würde; $\mathfrak{H}^{(1)}$ = das durch die magnetisierbare Materie hervorgerufene Zusatzfeld zu $\mathfrak{H}^{(0)}$; $\mathfrak{H}^{(01)} = \mathfrak{H}^{(0)} + \mathfrak{H}^{(1)}$; $\mathfrak{H}^{(2)}$ = das Feld, welches vom permanenten Magnetismus bei Abwesenheit magnetisierbarer Substanz und elektrischer Ströme geliefert wurde, $\mathfrak{H}^{(3)}$ = das durch die magnetisierbare Materie erzeugte Zusatzfeld zu $\mathfrak{H}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(23)} = \mathfrak{H}^{(2)} + \mathfrak{H}^{(3)}$. Es gilt also

$$\mathfrak{H} = \sum_{\alpha=0}^3 \mathfrak{H}^{(\alpha)} \quad \text{mit} \quad \text{rot } \mathfrak{H}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \quad \text{und} \quad \text{rot } \mathfrak{H}^{(\sigma)} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Eine analoge Zerlegung führen wir mit den Feldgrößen \mathfrak{B} und \mathfrak{M} durch. Für die Magnetisierung erhält man gemäß Gl. (1)

$$\mathfrak{M}^{(0)} = 0; \quad \mathfrak{M}^{(1)} = \chi \mathfrak{H}^{(01)}; \quad \mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}_p; \quad \mathfrak{M}^{(3)} = \chi \mathfrak{H}^{(23)}. \quad (5)$$

Um die Wechselwirkung zwischen Strom und permanentem Magneten zu erfassen, ist es bekanntlich nötig, nicht nur die magnetische Feldenergie, sondern auch die elektrische Energie des Stromkreises zu betrachten. Für dieses System gilt bei einer Verrückung

$$\delta A + \delta \Theta + \delta F = 0. \quad (6)$$

Dabei ist δA die vom Feld geleistete Arbeit

$$\delta A = \sum_k Q_k \delta q_k \quad (7)$$

(Q_k, q_k = generalisierte Kräfte bzw. Koordinaten). $\delta \Theta$ stellt die Änderung der chemisch-thermischen Energie dar:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \int_{\mathfrak{V}} \mathfrak{E} \mathbf{i} dV = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathfrak{V}} \mathfrak{E} \text{rot } \mathfrak{H}^{(0)} dV = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathfrak{V}} \mathfrak{H}^{(0)} \text{rot } \mathfrak{E} dV,$$

so daß wir wegen des Induktionsgesetzes erhalten

$$\delta\Theta = -\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(0)} \delta\mathfrak{B} dV. \quad (8)$$

Die freie Energie des Feldes berechnet sich zu

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \int_{\mathfrak{B}(\mathfrak{H}=0)} \mathfrak{H} d\mathfrak{B} dV \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} \mu \mathfrak{H}^2 dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(0)} \mathfrak{B}^{(01)} dV - \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathfrak{M}_p \mathfrak{H}^{(23)} dV. \dagger \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hält man den Strom bei Verrückungen konstant, so folgt aus Gl. (6) schließlich

$$\left. \begin{aligned} \delta A &= \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(0)} \delta\mathfrak{B}^{(01)} dV + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(0)} \delta\mathfrak{B}^{(23)} dV + \frac{1}{2} \int_{\infty} \delta(\mathfrak{M}_p \mathfrak{H}^{(23)}) dV. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Für die Arbeit bei Einbringen des Teilchens mit induzierter und permanenter Magnetisierung in das Feld $\mathfrak{H}^{(0)}$ ergibt sich damit

$$A = \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(0)} \mathfrak{B}^{(1)} dV + \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(0)} \mathfrak{B}^{(23)} dV. \quad (11)$$

Für das erste Glied kann man auch schreiben

$$\frac{1}{2} \int_{\infty} \chi \mathfrak{H}^{(0)} \mathfrak{H}^{(01)} dV,$$

während das zweite Glied auf die Form

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(01)} \mathfrak{B}^{(23)} dV = \int_{\infty} \mathfrak{H}^{(01)} \mathfrak{M}_p dV$$

gebracht werden kann.

Die geleistete Arbeit ist gleich der negativen potentiellen Energie W des Teilchens im Magnetfeld, also

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_T} \mathfrak{H}^{(01)} (\chi \mathfrak{H}^{(0)} + 2\mathfrak{M}_p) dV. \quad (12)$$

Dabei sind die Größen, die unter dem Integral vorkommen, nur *im* Teilchen von Null verschieden, so daß wir die Integration lediglich über das

† Wir verwenden hier und im folgenden den Satz, daß das Skalarprodukt aus einem rotations- und einem divergenzfreien Vektor, integriert über den ganzen Raum, verschwindet.

Teilchenvolumen V_j zu erstrecken brauchen. Um die Feldstärke $\mathfrak{H}^{(1)}$ im Teilchen durch die Feldstärke $\mathfrak{H}^{(0)}$ ausdrücken zu können, nehmen wir ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}^{(0)}$ an und approximieren die Teilchen durch gestreckte Rotationsellipsoide.

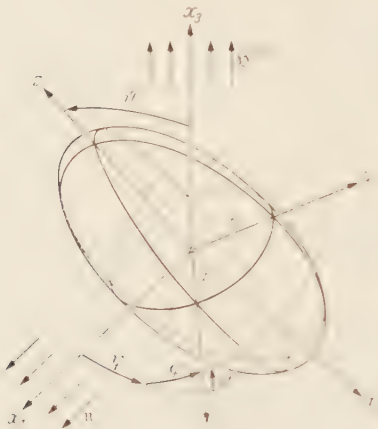


Fig. 1. Das raumfeste und das teilchenfeste Koordinatensystem. Die EULERSchen Winkel θ , φ und ψ .

Wir wollen zwei Koordinatensysteme einführen: Ein raumfestes Koordinatensystem $x_i (x_1, x_2, x_3)$, dessen x_3 -Achse parallel zur Richtung des Feldes $\mathfrak{H}^{(0)}$ ist; ferner ein teilchenfestes System $x_v (x, y, z)$, dessen Koordinatenachsen mit den Achsen des Ellipsoides zusammenfallen (vgl. Fig. 1). Zwischen diesen beiden Systemen gelten dann die Transformationsformeln

$$x_v = \sum_i c_{vi} x_i \quad \text{bzw.} \quad x_i = \sum_v c_{vi} x_v, \quad (13)$$

wobei die Matrix c_{vi} , ausgedrückt durch die EULERSchen Winkel, lautet

$$\begin{vmatrix} c_{x1} & c_{x2} & c_{x3} \\ c_{y1} & c_{y2} & c_{y3} \\ c_{z1} & c_{z2} & c_{z3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun wenden wir uns der Feldstärke im Inneren des Ellipsoides zu. In teilchenfesten Koordinaten (x, y, z) gilt für die Zusatzfeldstärke $\mathfrak{H}^{(1)}$

$$H_{v(i)}^{(1)} = -N_v M_r^{(1)}. \quad (15)$$

Die Größen N_x, N_y und N_z sind die sog. Entmagnetisierungsfaktoren, die durch die Achsen a, b und c des Ellipsoides bestimmt sind. In dem uns interessierenden Falle eines gestreckten Rotationsellipsoides ($a = b \neq c$) bestimmen sich die N durch

$$\left. \begin{aligned} N_z &= 4\pi \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 1 \right), & N_x = N_y &= 2\pi - \frac{N_z}{2} \\ \text{mit} & & \varepsilon &= \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Für die Feldstärke $\mathfrak{H}_{(i)}^{(01)}$ im Inneren folgt aus Gl. (5) und (15)

$$H_{v(i)}^{(01)} = \frac{H_v^{(0)}}{1 + N_v \chi} \quad (17)$$

und man findet damit

$$W^{(0)} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu} \alpha_{\nu}^{(0)} H_{\nu}^{(0)2} - \sum_{\nu} p_{\nu}^{(0)} H_{\nu}^{(0)} \dagger, \quad (18)$$

wobei die Größen

$$\left. \begin{aligned} p_{\nu}^{(0)} &= \frac{M p_{\nu}}{1 + N_{\nu} \chi} V_T & \text{das magnetische Moment und} \\ \alpha_{\nu}^{(0)} &= \frac{\chi}{1 + N_{\nu} \chi} V_T & \text{die magnetische Polarisierbarkeit} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

des Teilchens darstellen.

Wenn wir nun davon Gebrauch machen, daß die permanente Magnetisierung \mathfrak{M}_z und damit das Moment $p_z^{(0)}$ parallel zur ausgezeichneten z -Achse liegt (vgl. I)

$$p_x^{(0)} = p_y^{(0)} = 0, \quad p_z^{(0)} = p^{(0)}$$

und daß wegen der Rotationssymmetrie gilt

$$\alpha_x^{(0)} = \alpha_y^{(0)},$$

so erhalten wir für die Energie des Teilchens im Feld

$$W^{(0)} = -H^{(0)} p^{(0)} \cos \vartheta + \frac{1}{2} H^{(0)2} (\sin^2 \vartheta \cdot \Delta \alpha^{(0)} - \alpha_z^{(0)}) \quad (20)$$

Die Größe

$$\Delta \alpha^{(0)} \equiv \alpha_x^{(0)} - \alpha_z^{(0)} = \frac{\chi^2 (N_x - N_z)}{(1 + N_z \chi) (1 + N_x \chi)} V_T = \Delta \alpha^{(0)'} \cdot V_T \quad (21)$$

ist für ein gestrecktes Rotationsellipsoid ($N_x > N_z$) stets positiv.

Für *dia-* und *paramagnetische* Teilchen ($|\mu - 1| < 1$) wird

$$\Delta \alpha^{(0)'} \approx (N_x - N_z) \chi^2. \quad (22)$$

Da man in diesem Fall größenordnungsmäßig $|\chi| \approx 10^{-6}$ setzen kann, erhält man bei einem Achsenverhältnis $c/a = 8$ ($N_x = 6,10$ und $N_z = 0,36$)

$$\Delta \alpha^{(0)'} \approx 6 \cdot 10^{-12}.$$

Liegen *ferromagnetische* Teilchen mit hoher Suszeptibilität vor ($\chi \approx N_x^{-1}$), so ergibt sich

$$\Delta \alpha^{(0)'} \approx \frac{1}{N_x} - \frac{1}{N_z}. \quad (23)$$

Bei demselben Achsenverhältnis folgt daraus in diesem Fall

$$\Delta \alpha^{(0)'} \approx 2,6.$$

* Wir bezeichnen im folgenden die Größen, die sich auf das statische Magnetfeld beziehen, mit dem oberen Index 0 um Verwechslungen mit den Größen des Lichtfeldes zu vermeiden.

Für Ferromagnetica geringer Suszeptibilität (z. B. $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ mit $\chi \approx 0,04$ g.; vgl. Fig. 4) muß jedoch die allgemeine Gl. (21) herangezogen werden. Mit dem obigen Wert für c/a findet man daraus für $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ -Teilchen

$$\Delta\alpha^{(0)'} \approx 7 \cdot 10^{-3}.$$

Aus diesen Abschätzungen ist ersichtlich, daß ferromagnetische Teilchen einen wesentlich größeren Orientierungseffekt erwarten lassen, als dia- oder paramagnetische. Ein außerdem vorhandenes permanentes Moment $p^{(0)}$ wirkt natürlich besonders zugunsten der Ferromagnetica.

Nach Gl. (7) ist das am Teilchen angreifende Drehmoment

$$D^{(0)} = \frac{\partial A}{\partial \vartheta} = - \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \vartheta} = - \left(H^{(0)} p^{(0)} \sin \vartheta + \frac{1}{2} H^{(0)2} \Delta\alpha^{(0)} \sin 2\vartheta \right). \quad (24)$$

Die stabilen Gleichgewichtslagen gestreckter Rotationsellipsoide im Magnetfeld ($W^{(0)}$ Minimum) ergeben sich hieraus zu

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 & \text{für} & \quad H^{(0)} \Delta\alpha^{(0)} \leq p^{(0)} \\ \vartheta &= 0 \text{ und } \pi & \text{für} & \quad H^{(0)} \Delta\alpha^{(0)} > p^{(0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Unsere experimentellen Untersuchungen (1) der freischwebenden Teilchen im Mikroskop zeigten ein Umklappen beim Kommutieren des \mathbf{H} -Feldes (≤ 10 Oe), d. h. nur $\vartheta = 0$ war eine stabile Lage. Wir hatten daraus geschlossen, daß ein permanentes Moment vorhanden sein muß. Jetzt sind wir im Stande diese Aussage durch die Ungleichung $H^{(0)} \Delta\alpha^{(0)} \leq p^{(0)}$ zu präzisieren. Umgekehrt könnte man aber aus einem nicht erfolgenden Umklappen der Teilchen beim Kommutieren des Feldes nicht eindeutig auf die Abwesenheit eines permanenten Momentes schließen.

Für dia- und paramagnetische und ideal weiche ferromagnetische Medien ist $p^{(0)} = 0$. In diesem Fall sind in Gl. (24) die Nullstellen von $\sin 2\vartheta$ maßgebend. Je nachdem $\Delta\alpha > 0$ ist, ergibt sich die stabile Gleichgewichtslage zu $\vartheta = \begin{cases} 0 \\ \pi/2 \end{cases}$.

3. Statistische Verteilung.

Wir betrachten nun ein System von Teilchen. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einer Stellung $d\Omega$ anzufinden, ist nach der BOLTZMANN-Statistik gegeben durch

$$d\Psi = \frac{\exp\left(-\frac{W^{(0)}}{kT}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{W^{(0)}}{kT}\right) d\Omega}. \quad (25)$$

$W^{(0)}$ ist die Energie des Teilchens im Magnetfeld und T die absolute Temperatur. Wir nehmen die Dichte der Teilchenwolke so verdünnt an,

daß keine Wechselwirkung zwischen den Partikeln stattfindet. Es entspricht dies unseren experimentellen und sicher auch den interstellaren Verhältnissen.

Drückt man W^0 durch die gegebenen Größen aus, so kann man für Gl. (25) schreiben

$$d\Psi = C \varepsilon(\vartheta) d\Omega. \quad (26)$$

Dabei ist

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\vartheta) &= \exp(u \cos \vartheta - v \sin^2 \vartheta) \\ u &= \frac{H^{(1)} p^{(5)}}{kT} \geq 0 \\ v &= \frac{H^{(1)2} \Delta \alpha^{(0)}}{2kT} \geq 0 \\ d\Omega &= \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi \\ C^{-1} &= 4\pi^2 \int_0^\pi \varepsilon(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

4. Konsumptive Absorption der Teilchenwolke im Magnetfeld.

Die durch das Magnetfeld hervorgerufene Orientierung der Teilchen bewirkt in optischer Hinsicht eine nach außen sichtbar werdende Anisotropie der gesamten Teilchenwolke. Zur Behandlung dieses optischen Vorganges beschränken wir uns auf Teilchen, die klein gegenüber der Lichtwellenlänge sind, d. h. die elektrischen Schwingungen innerhalb der Teilchen werden als quasistatisch und homogen angesehen. Da die von uns experimentell untersuchten Teilchen (I) im Mittel etwa in der Größenordnung der Lichtwellenlänge und darüber liegen, können die Ergebnisse der Theorie auf diese Experimente nur näherungsweise angewendet werden. Es wird jedoch erlaubt sein, durch Kombination von experimentellen und theoretischen Ergebnissen Schlüsse auf die galaktische Magnetfeldstärke zu ziehen, zumal ja unsere Theorie die magnetische Seite dieses Vorganges exakt beschreibt.

Wir wollen uns im folgenden also auf sehr kleine, ellipsoide Teilchen beschränken. Ihr optisches Verhalten beschreiben wir durch das elektrische Moment p , das durch die äußere Lichtwelle induziert wird

$$p_i = \sum_k \alpha_{ik} E'_k. \quad (28)$$

Da wir Wechselwirkungen zwischen den Teilchen vernachlässigen können, ist die „wirksame“ Feldstärke \mathcal{E}' gleich derjenigen der linear polarisiert einfallenden Lichtwelle \mathcal{E} . Im (optischen) Polarisierbarkeits-tensor α_{ik} kommt die asphärische Gestalt des Teilchens zum Ausdruck. Bei der Untersuchung von nichtkubischem Material würde in α_{ik} auch die optisch-kristallographische Anisotropie enthalten sein. Wir beschränken

uns jedoch hier entsprechend unseren experimentellen Untersuchungen auf kubisches Teilchenmaterial. Im teilchenfesten Koordinatensystem stellt sich $\alpha_{\mu\nu}$ folgendermaßen durch den Brechungsindex n_T des Teilchenmaterials, das Teilchenvolumen V_T und die in Gl. (16) eingeführten Entmagnetisierungsfaktoren N_x und N_z — die hier zu Entelektrisierungsfaktoren werden — dar

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{xx} = \alpha_{yy} &= \frac{n_T^2 - 1}{4\pi + (n_T^2 - 1)N_x} V_T, & \alpha_{zz} &= \frac{n_T^2 - 1}{4\pi + (n_T^2 - 1)N_z} V_T, \\ \alpha_{\mu\nu} &= 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Den Brechungsindex n_T müssen wir wegen vorhandener konsumptiver Absorption (Joulescher Wärme) komplex ansetzen. Damit wird auch $\alpha_{\mu\nu}$ komplex.

Von der Polarisierbarkeit α_{ik} des einzelnen Teilchens ist die mittlere Polarisierbarkeit $\overline{\alpha}$ zu unterscheiden, die das optische Verhalten der Gesamtheit der Teilchen beschreibt und damit die experimentellen Beobachtungen bestimmt. Bei dieser räumlichen Mittelwertbildung haben wir die Orientierung der einzelnen Teilchen durch das angelegte Magnetfeld zu berücksichtigen. Aus $\overline{\alpha}$ läßt sich ein (komplexer) anisotroper Brechungsindex \mathbf{n} der gesamten Teilchenwolke berechnen, dessen Imaginärteil die durch konsumptive Absorption bewirkte Polarisation des Lichtes liefert, während der Realteil für eventuell vorhandene Doppelbrechung maßgebend ist.

A. Berechnung der mittleren Polarisierbarkeit $\overline{\alpha}_{ik}$.

Zur Bestimmung des mittleren Polarisierbarkeitstensors $\overline{\alpha}_{ik}$ führen wir zwei raumfeste Einheitsvektoren $e_i^{(1)}$ und $e_i^{(2)}$ ein. Zwischen dem raumfesten und dem teilchenfesten Koordinatensystem gilt dann

$$\sum_{i,k} \overline{\alpha}_{ik} e_i^{(1)} e_k^{(2)} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)}. \quad (30)$$

Nun betrachten wir das Teilchen in allen möglichen Stellungen relativ zum raumfesten Koordinatensystem. Dabei ändern sich die Größen $\alpha_{\mu\nu}$, $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ nicht. Die räumliche Mittelung ist unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit $d\Psi$, ein Teilchen in einer Stellung $d\Omega$ zu finden [Gl. (26)], auszuführen

$$\sum_{i,k} \overline{\alpha}_{ik} e_i^{(1)} e_k^{(2)} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} \int e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} d\Psi = C \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} \int e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} \varepsilon(\vartheta) d\Omega \quad (31)$$

oder wegen der Transformationsformeln (13)

$$\sum_{i,k} \overline{\alpha}_{ik} e_i^{(1)} e_k^{(2)} = C \sum_{\mu,\nu} \sum_{i,k} \alpha_{\mu\nu} e_i^{(1)} e_k^{(2)} \int c_{\mu i} c_{\nu k} \varepsilon(\vartheta) d\Omega.$$

Da die Einheitsvektoren beliebig gewählt werden können, finden wir

$$\alpha_{ik} = C \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu\nu} U_{\mu i \nu k} \quad \text{mit} \quad U_{\mu i \nu k} = \int_{\Omega} c_{\mu i} c_{\nu k} \varepsilon(\vartheta) d\Omega. \quad (32)$$

Die Bestimmung des mittleren Polarisierbarkeitstensors ist damit auf die Berechnung von $U_{\mu i \nu k}$ zurückgeführt. Diese Größe ist in den Indexpaaren (μi) und (νk) symmetrisch, d.h. $U_{\mu i \nu k} = U_{\nu k \mu i}$. Unter Berücksichtigung von Gl. 14 finden wir für die von Null verschiedenen Komponenten

$$\left. \begin{aligned} U_{x1x1} = U_{x2x2} = U_{y1y1} = U_{y2y2} &= \pi^2 (\Phi_0 + \Phi_2) \\ U_{x3x3} = U_{y3y3} = U_{z1z1} = U_{z2z2} &= 2\pi^2 (\Phi_0 - \Phi_2) \\ U_{z3z3} &= 4\pi^2 \Phi_2 \\ U_{x1y2} = U_{y2x1} = -U_{x2y1} = -U_{y1x2} &= 2\pi^2 \Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Über die Berechnung der elementar nicht auswertbaren Integrale

$$\Phi_\varrho(u; v) = \int_0^\pi e^{u \cos \vartheta - v \sin^2 \vartheta} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (34)$$

berichtet der Anhang dieser Arbeit. Wir können sie danach als bekannte Funktionen von u und v , d.h. der magnetostatischen Größen $H^{(0)}$, $\rho^{(0)}$, $1\alpha^{(0)}$ und der Temperatur T ansehen. Für den Normierungsfaktor C können wir jetzt schreiben

$$C^{-1} = 4\pi^2 \Phi_0. \quad (35)$$

Berücksichtigt man, daß bei kubisch-kristallisiertem Material der Polarisierbarkeitstensor nur Diagonalglieder besitzt (Gl. (29)), so folgt aus Gl. (33), daß dies auch für $\overline{\alpha_{ik}}$ gilt

$$\overline{\alpha_{ik}} = \begin{cases} \overline{\alpha_{ii}} = C \sum_u \alpha_{\mu\mu} U_{\mu i \mu i} & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (36)$$

Wegen der Rotationssymmetrie der Teilchen erhält man hierfür

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\alpha_{11}} = \overline{\alpha_{22}} &= \frac{1}{2} [\alpha_{xx} + \alpha_{zz} + S_2(u; v) \cdot (\alpha_{xx} - \alpha_{zz})] \\ \overline{\alpha_{33}} &= \alpha_{xx} - S_2(u; v) \cdot (\alpha_{xx} - \alpha_{zz}) \end{aligned}}, \quad (37)$$

wenn wir den Quotienten

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_\varrho} = S_\varrho \quad (38)$$

nennen. Die Abhängigkeit der Größen S_ϱ von u und v wird ebenfalls im Anhang dargestellt.

Mit der Gl. (37) ist die mittlere Polarisierbarkeit der Teilchenwolke als Funktion der Polarisierbarkeit des einzelnen kubisch kristallisierten Teilchens, des Magnetfeldes und der Temperatur dargestellt.

B. Der Brechungsindex \mathbf{n} der Teilchenwolke.

Aus der mittleren Polarisierbarkeit $\overline{\alpha}_{ik}$ wollen wir den mittleren (komplexen) Brechungsindex \mathbf{n} der Teilchenwolke im Magnetfeld berechnen. Verstehen wir unter N die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, so gilt für die dielektrische Verschiebung der Lichtwelle

$$D_i = \sum_k \epsilon_{ik} E_k = E_i + 4\pi N \overline{\alpha}_{ik} E_k = 4\pi N \sum_k \overline{\alpha}_{ik} E_k,$$

woraus folgt

$$\epsilon_{ik} = 4\pi N \overline{\alpha}_{ik} + \delta_{ik}. \quad (39)$$

Legen wir die x_1 -Richtung parallel zur Wellennormalen \mathbf{n} des einfallenden Lichtes (vgl. Fig. 1), so können wir aus der Grundgleichung der Kristalloptik

$$\mathfrak{D} = \mathbf{n}^2 (\mathfrak{E} - \mathbf{n}(\mathfrak{E} \mathbf{n}))$$

die Brechungsindizes parallel und senkrecht zum Magnetfeld \mathbf{n}_{\parallel} und \mathbf{n}_{\perp} berechnen. Für kubisch-kristallisierte Rotationsellipsoide ergibt sich daraus

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_{\parallel} &= \sqrt{\epsilon_{33}} = \sqrt{1 + 4\pi N \overline{\alpha}_{33}} \\ \mathbf{n}_{\perp} &= \sqrt{\epsilon_{11}} = \sqrt{1 + 4\pi N \overline{\alpha}_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Die Größen $\overline{\alpha}_{11}$ und $\overline{\alpha}_{33}$ bzw. α_{xx} und α_{zz} sind nach Gl. (37) bzw. (29) dem Teilchenvolumen V_T proportional:

$$\overline{\alpha}_{11} = \overline{\alpha}_{11} V_T, \quad \overline{\alpha}_{33} = \overline{\alpha}_{33} V_T; \quad \alpha_{xx} = \alpha'_{xx} V_T, \quad \alpha_{zz} = \alpha'_{zz} V_T. \quad (41)$$

Wir können die Wurzeln $\sqrt{1 + 4\pi N V_T \overline{\alpha}}$ in den Gl. (40) entwickeln, denn einerseits ist sicher $N V_T \ll 1$, da N die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit darstellt, und andererseits können die Beträge $|\overline{\alpha}|$ im allgemeinen — d. h. solange wir uns nicht den Stellen $N_{x,z} = -\frac{4\pi}{\overline{\alpha}}$, $\alpha_T = 0$ nähern — nicht so groß werden, daß sich dadurch die Ungleichungen $4\pi N V_T |\overline{\alpha}| \ll 1$ ändern könnten. Unter Berücksichtigung von Gl. (37) erhalten wir damit für die Differenz der komplexen Brechungsindizes

$$\mathbf{n} - \mathbf{n}_{\perp} = -[3 S_2(u; v) - 1] \cdot \pi N V_T \cdot (\alpha'_{xx} - \alpha'_{zz}). \quad (42)$$

Versteht man unter \mathbf{n}_0 den Brechungsindex der Teilchenwolke für $H^{(0)} = 0$ [in diesem Fall wird $S_2 = \frac{1}{3}$, vgl. Gl. (49)], so liefert Gl. (37)

† Wir unterlassen der Einfachheit halber den Querstrich über \mathbf{n} und ϵ_{ik} .

¹ In unseren Experimenten (I) war $N V_T \approx 10^{-5}$. Für den interstellaren Rauch ist diese Größe wegen N noch wesentlich kleiner. Im exakten Gültigkeitsbereich unserer Theorie — Teilchen klein gegenüber Wellenlänge — wird $N V_T$ wegen des geringeren Teilchenvolumens bei gleichem N ebenfalls kleiner.

die für eine Orientierungstheorie charakteristische Beziehung

$$\frac{n_0 - n_{\perp}}{n_0 - n_{\parallel}} = -\frac{1}{2}, \quad (43)$$

welche bislang in der Literatur nur für eine geringe Ausrichtung der Teilchen abgeleitet wurde.

Nach den Gesetzen der Metalloptik folgt aus dem komplexen Brechungsindex \mathbf{n} der reelle Brechungsindex n und der Absorptionsindex κ :

$$\Re(\mathbf{n}) = n, \quad \Im(\mathbf{n}) = -n\kappa \quad (44)$$

(\Re = Realteil; \Im = Imaginärteil). Der Realteil von Gl. (42) ergibt also die durch das äußere Magnetfeld hervorgerufene Doppelbrechung, während der Imaginärteil den magnetischen Dichroismus liefert.

C. Die Polarisation des Lichtes, hervorgerufen durch anisotrope, konsumptive Absorption.

Die Polarisation P , die unpolarisiertes Licht beim Durchgang durch die Teilchenwolke von der Länge L im Magnetfeld erleidet, stellt sich nach Gl. (I.4) durch die Absorptionskoeffizienten h und h_{\perp} in der Form dar:

$$P = \Im g \left[\frac{L}{2} (h_{\parallel} - h_{\perp}) \right]. \quad (45)$$

Die Polarisation P_J , die durch die anisotrope, konsumptive Absorption h_J bedingt ist, ergibt sich wegen

$$h_J = \frac{4\pi}{\lambda_0} n\kappa = -\frac{4\pi}{\lambda_0} \Im(\mathbf{n}) \quad (46)$$

nach Gl. (42) zu

$$P_J = \Im g \left[\left(3 S_2(u; v) - 1 \right) \cdot R_J \right], \quad (47)$$

wobei wir die dimensionslose Größe

$$R_J = \frac{2\pi^2 L N V_T}{\lambda_0} \Im(\alpha'_{xx} - \alpha'_{zz}) \quad (48)$$

einführen, welche die optische Seite des Polarisations-effektes beschreibt.

D. Diskussion der Formel für P_J .

Für kugelförmige Partikel wird $\alpha'_{xx} = \alpha'_{zz}$, d.h. die Größe R_J (und damit P_J) ist Null. Im Fall gestreckter Rotationsellipsoide ist R_J im allgemeinen positiv, d.h. es liegt ein positiver Dichroismus vor. Um dies zu zeigen, zerlegen wir die komplexe Größe $\xi = \mathbf{n}_T^2 - 1 = \xi' + i\eta$ in Real- und Imaginärteil (η ist stets ≥ 0) und skizzieren $\Im(\alpha'_{xx})$ bzw. $\Im(\alpha'_{zz})$ als Funktion der Entelektrisierungsfaktoren N_x bzw. N_z , wobei wir ξ und η

als Parameter ansehen (Fig. 2). Wir erinnern uns, daß die Größe N_z mit zunehmender Exzentrizität des gestreckten Rotationsellipsoids von $4\pi/3$ auf 0 abnimmt, während N_x von $4\pi/3$ auf 2π anwächst. Aus der Fig. 2 ist daher ersichtlich, daß für $\xi \geq 0$ stets $\delta(\alpha'_{xx}) - \alpha'_{xx} \geq 0$ ist. Für negative ξ -Werte ist die Differenz $\delta(\alpha'_{xx}) - \alpha'_{xx}$ sicher ≤ 0 , falls $-\frac{1}{4\pi} \leq -\delta(\alpha'_{xx})$ gilt. Hieraus erhält man die Bedingung $\xi^2 - 6\xi + \eta^2 \geq 0$, die in der komplexen ξ -Ebene das Äußere eines Kreises K vom Radius 3 und mit dem Mittelpunkt $\xi = 3$, $\eta = 0$ darstellt. Berechnet man die Größe ξ aus den experimentell bekannten n_T - und α_T -Werten für verschiedene absorbierende Materialien, die sich etwa in dem Bornischen Lehrbuch der Optik [2] finden, so stellt man fest, daß die ξ -Werte alle außerhalb K liegen, also positives R_f liefern.

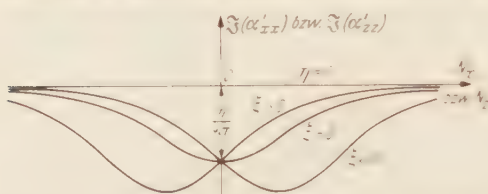


Fig. 2. $\delta(\alpha'_{xx})$ bzw. $\delta(\alpha'_{zz})$ und umkehrberechnete Exzentrizitätsfaktoren N_x bzw. N_z .

Aus der Formel (48) entnehmen wir weiter das sehr plausible Ergebnis, daß die Polarisation mit der Anzahl

der Teilchen im Lichtweg (NL = Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit mal der Länge der vom Licht durchlaufenen Strecke) und dem Teilchenvolumen zunimmt.

Während in der Größe R_f die optischen Eigenschaften des Teilchens zum Ausdruck kommen, ist $S_2(u, v)$ für die magnetische Seite des Orientierungsvorganges maßgebend. Die Argumente u und v bestimmen sich aus den magnetischen Eigenschaften des Teilchens, dem herrschenden Magnetfeld und der Temperatur [Gl. (27)].

Aus Gl. (47) folgt, daß die Polarisation Null wird, wenn $3S_2 - 1 = 0$ ist. Das ist der Grenzfall eines verschwindenden Magnetfeldes. Die im Anhang dieser Arbeit durchgeführte Berechnung der Funktion $S_2(u, v)$ zeigt nämlich (vgl. Fig. 9, 10 und 11), daß diese Funktion Werte zwischen $\frac{1}{3}$ und 1 annimmt. Aus Gl. (34) sieht man sofort, daß die untere Grenze dieses Intervalles erreicht wird, falls $u \rightarrow 0$ und $v \rightarrow 0$, d. h. $H^{(0)} \rightarrow 0$ oder $T \rightarrow \infty$ strebt. In diesem Fall einer fehlenden Orientierung ist natürlich die Teilchenwolke isotrop

$$\overline{\alpha_{11_0}} = \overline{\alpha_{22_0}} = \overline{\alpha_{33_0}} = \frac{1}{3} (2\alpha_{xx} + \alpha_{zz}) = \overline{\alpha_0} \quad (49)$$

und die Polarisation verschwindet.

Der andere Grenzfall $S_2 = 1$ stellt die völlige Orientierung der Teilchen parallel zum Magnetfeld dar ($u \rightarrow \infty$ oder $v \rightarrow \infty$, d. h. $H^{(0)} \rightarrow \infty$ oder $T \rightarrow 0$). Dabei erhalten wir das verständliche Ergebnis

$$\overline{\alpha_{11_\infty}} = \overline{\alpha_{22_\infty}} = \alpha_{xx}, \quad \overline{\alpha_{33_\infty}} = \alpha_{zz} \quad (50)$$

der Summe der Streuintensitäten der einzelnen Teilchen

$$J_{sq} = \sum_{j=1}^{NV} \frac{\omega^4}{c^4 r_{j2}^2} |\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}|^2$$

und in genügend großer Entfernung von der „Wolke“ sind die Abstände r_j ungefähr gleich einem mittleren Abstand r :

$$J_{sq} = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \sum_{j=1}^{NV} |\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}|^2.$$

An Stelle der Summe über alle NV Teilchen können wir den Konstellationsmittelwert unter Berücksichtigung der statistischen Orientierung durch das Magnetfeld setzen, wenn wir noch mit NV multiplizieren:

$$J_{sq} = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} NV \overline{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|^2}. \quad (54)$$

Zur Berechnung der Größe $\overline{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|^2} = \int_{\Omega} |\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|^2 dV$ berücksichtigen wir Gl. (52)

$$\overline{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|^2} = \sum_{\mu, \nu, \varrho, \sigma} \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\varrho\sigma}^* \overline{q_\mu E_{\nu 0} q_\varrho E_{\sigma 0}}$$

— wobei $\alpha_{\varrho\sigma}^*$ der zu $\alpha_{\varrho\sigma}$ konjugiert komplexe Tensor ist — und transformieren nach Gl. (13) die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{E}_0 vom teilchenfesten Koordinatensystem auf das raumfeste. Somit ergibt sich

$$\overline{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|^2} = C \sum_{\mu, \nu, \varrho, \sigma} \sum_{i, k, l, m} \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\varrho\sigma}^* q_i E_{k0} q_l E_{m0} U_{\mu i, \nu k, \varrho l, \sigma m} \quad (55)$$

mit

$$U_{\mu i, \nu k, \varrho l, \sigma m} = \int_{\Omega} c_{\mu i} c_{\nu k} c_{\varrho l} c_{\sigma m} \varepsilon(\vartheta) d\Omega. \quad (56)$$

Das Problem der Berechnung des Streulichtes ist damit auf die Bestimmung von $U_{\mu i, \nu k, \varrho l, \sigma m}$ zurückgeführt. Da diese Größe in allen vier Indexpaaren symmetrisch ist, d.h. $U_{\mu i, \nu k, \varrho l, \sigma m} = U_{\nu k, \mu i, \varrho l, \sigma m} = \dots$, reduzieren sich ihre $3^8 = 6561$ Komponenten auf zunächst $\binom{9-1}{4} = 495$ verschiedene, von denen jedoch 415 Größen bei der Integration über q und p zu Null werden. Bei der Bestimmung der restlichen 80 Integrale ist die Integration über q und p elementar, während die Integration über ϑ Linearkombinationen der in Gl. (34) eingeführten Funktionen $\Phi_s(u; v)$ ($\varrho = 0, \dots, 4$) ergibt. Da wir uns mit kubisch-kristallisierten Materialien beschäftigen, bei welchen nach Gl. (29) $\alpha_{\mu\nu}$ nur Diagonalglieder besitzt, benötigen wir lediglich die Komponenten von $U_{\mu i, \nu k, \varrho l, \sigma m}$, für welche $\mu = \nu$ und $\varrho = \sigma$ ist, wodurch uns von den 80 Größen nur noch 54 zu interessieren brauchen. Führt man die folgenden Linearkombinationen

der $\Phi_0(u; v)$ mit geradem Index ein

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\pi^2}{16} (3\Phi_0 + 2\Phi_2 + 3\Phi_4) & K_6 &= \frac{\pi^2}{32} (\Phi_0 + 22\Phi_2 + \Phi_4) \\ K_2 &= \frac{\pi^2}{4} (\Phi_0 + 2\Phi_2 - 3\Phi_4) & K_7 &= \frac{\pi^2}{8} (3\Phi_0 - 2\Phi_2 - \Phi_4) \\ K_3 &= \frac{\pi^2}{2} (\Phi_0 - 2\Phi_2 + \Phi_4) & K_8 &= \frac{\pi^2}{2} (\Phi_2 + \Phi_4) \\ K_4 &= 2\pi^2 (\Phi_2 - \Phi_4) & K_9 &= \frac{\pi^2}{8} (-\Phi_0 + 10\Phi_2 - \Phi_4), \\ K_5 &= \frac{4\pi^2}{3} \Phi_4 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

die so normiert sind, daß sich für den Limes $H^{(0)} \rightarrow 0$ (d. h. $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$) ergibt

$$K_\lambda(0) = \frac{8\pi^2}{15} \quad (\lambda = 1, \dots, 9), \quad (58)$$

so lauten die 54 Komponenten

$$\left. \begin{aligned} U_{x1,x1,x1,x1} &= U_{y1,y1,y1,y1} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 3K_1 & U_{x1,x1,x1,x1} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 3K_3 \\ U_{x2,x2,x2,x2} &= U_{y2,y2,y2,y2} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} K_1 & U_{x2,x2,x2,x2} &= K_3 \\ U_{x1,x1,x2,x2} &= U_{y1,y1,y2,y2} = K_1 & U_{x1,x1,x2,x2} &= K_3 \\ U_{x1,x1,x3,x3} &= U_{y1,y1,y3,y3} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} K_2 & U_{x1,x1,x3,x3} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} K_4 \\ U_{x2,x2,x3,x3} &= U_{y2,y2,y3,y3} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 3K_3 & U_{x2,x2,x3,x3} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 3K_5 \\ U_{x3,x3,x3,x3} &= U_{y3,y3,y3,y3} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} K_2 & U_{x3,x3,x3,x3} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} K_1 \\ U_{x2,x2,z2,z2} &= U_{y2,y2,z2,z2} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} K_4 & U_{x2,x2,z2,z2} &= K_3 \\ U_{x3,x3,z3,z3} &= U_{y3,y3,z3,z3} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 2K_7 & U_{x3,x3,z3,z3} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 2K_6 \\ U_{x1,x1,z2,z2} &= U_{y1,y1,z2,z2} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 2K_8 & U_{x1,x1,z2,z2} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 2K_7 \\ U_{x2,x2,z1,z1} &= U_{y2,y2,z1,z1} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} 2K_3 & U_{x2,x2,z1,z1} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} -\frac{1}{2}K_9 \\ U_{x3,x3,z1,z1} &= U_{y3,y3,z1,z1} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} -\frac{1}{2}K_4 & U_{x3,x3,z1,z1} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} -\frac{1}{2}K_3 \\ U_{x1,x1,z2,z2} &= U_{y1,y1,z2,z2} = -\frac{1}{2}K_3 & U_{x1,x1,z2,z2} &= -\frac{1}{2}K_9 \\ U_{x1,x3,z1,z3} &= U_{y1,y3,z1,z3} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} -\frac{1}{2}K_4 & U_{x1,x3,z1,z3} &= \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} -\frac{1}{2}K_3 \\ U_{x2,x3,z2,z3} &= U_{y2,y3,z2,z3} = \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Die restlichen, uns nicht interessierenden 26 Komponenten sind Linearkombinationen von Φ_1 und Φ_3 .

Um die Summationen in Gl. (55) auszuführen, summieren wir zuerst über μ und q

$$I_{iklm} = C \sum_{\mu, q} \alpha_{\mu\mu} \alpha_{qq}^* U_{\mu i, \mu k, q l, q m}, \quad (60)$$

wobei $\Gamma_{iklm} = \Gamma_{kilm} = \Gamma_{ikml} = \Gamma_{kiml}$ gilt. Die Summierung über die restlichen Indizes i, k, l, m liefert das Ergebnis

$$|\overline{pq}|^2 = Q_1(q_1^2 E_{10}^2 + q_2^2 E_{20}^2) + Q_2 q_3^2 E_{30}^2 + Q_3 q_1 q_2 E_{10} E_{20} + \\ + Q_4 q_3 E_{30} (q_1 E_{10} + q_2 E_{20}) + Q_5 (q_1 E_{20} + q_2 E_{10})^2 + \\ + Q_6 [(q_1 E_{30} + q_3 E_{10})^2 + (q_2 E_{30} + q_3 E_{20})^2] \quad (61)$$

Darin sind die Q_x Funktionen von u, v und $\alpha_{\mu\mu}$, nämlich

$$\left. \begin{aligned} Q_1 = \Gamma_{1111} &= \frac{1}{8} [a_{xx}(3 + 2S_2 + 3S_4) + \\ &\quad + 2a_{xz}(1 + 2S_2 - 3S_4) + 3a_{zz}(1 - 2S_2 + S_4)] \\ Q_2 = \Gamma_{3333} &= \frac{1}{8} [(1 - 2S_2 - S_4) - 2a_{xx}(S_2 - S_4) + a_{zz}S_4] \\ Q_3 = 2\Gamma_{1122} &= \frac{1}{4} [a_{xx}(1 + 6S_2 + S_4) + \\ &\quad + 2a_{xz}(3 - 2S_2 - S_4) + a_{zz}(1 - 2S_2 + S_4)] \\ Q_4 = \Gamma_{1133} + \Gamma_{3311} &= a_{xx}(1 - S_4) + a_{xz}(1 - S_2 + 2S_4) + \\ &\quad + a_{zz}(S_2 - S_4) \\ Q_5 = \Gamma_{1212} &= \frac{1}{8} (a_{xx} - 2a_{xz} + a_{zz})(1 - 2S_2 + S_4) \\ Q_6 = \Gamma_{1313} &= \frac{1}{2} (a_{xx} - 2a_{xz} + a_{zz})(S_2 - S_4) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

wobei die reellen Größen

$$2a_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\mu} \alpha_{\nu\nu}^* + \alpha_{\mu\nu}^* \alpha_{\nu\mu} \quad (63)$$

eingeführt wurden.

Durch die Gl. (61) und (62) ist in Verbindung mit Gl. (54) das Streulicht als Funktion der einfallenden Wellenlänge λ , der Analysatorstellung α und des homogenen Magnetfeldes H^0 bestimmt. Dabei wurde vorausgesetzt, daß das Material der Rotationsellipsoide kugelsymmetrisch kristallisiert ist. Über die relative Lage der Vektoren \mathcal{Q} , z und \mathcal{Q}^{01} wurden bis jetzt noch keine Annahmen gemacht.

Ist kein Magnetfeld vorhanden (fehlende Orientierung), so ist $S_2 = 1$ und $S_4 = \frac{1}{3}$ und die Gl. (62) gehen über in

$$\left. \begin{aligned} Q_{10} = Q_{20} &= \frac{1}{15} (8a_{xx} + 4a_{xz} + 3a_{zz}) \\ Q_{30} = Q_{40} &= \frac{1}{15} (12a_{xx} - 10a_{xz} - 2a_{zz}) \\ Q_{50} = Q_{60} &= \frac{1}{15} (a_{xx} + 2a_{xz} + a_{zz}) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Im anderen Extremfall volliger Orientierung der Teilchen ist $S_2 = S_4 = 1$ und damit wird

$$\left. \begin{aligned} Q_{1\infty} &= a_{xx}, & Q_{2\infty} &= a_{zz}, \\ Q_{3\infty} &= 2a_{xz}, & Q_{4\infty} &= 2a_{xz}, \\ Q_{5\infty} &= 0, & Q_{6\infty} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Sind die Teilchen kugelförmig ($\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha$), so ergibt sich das selbstverständliche Ergebnis, daß das Streulicht von $H^{(0)}$ unabhängig ist:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1K} &= Q_{2K} = \alpha \alpha^* \\ Q_{3K} &= Q_{4K} = 2\alpha \alpha^* \\ Q_{5K} &= Q_{6K} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

B. Das Streulicht im transversalen Magnetfeld.

Zur Beschreibung unserer Experimente (I) werde jetzt der Fall behandelt, in welchem das Magnetfeld $\vec{H}^{(0)}$ senkrecht zur Wellennormalen n des einfallenden Lichtes steht. Wir legen die Wellennormale wieder parallel zur x_1 -Achse, so daß $E_1 = 0$ wird, wodurch sich die Gl. (61) zu

$$\left. \begin{aligned} |\vec{p} \vec{q}|^2 &= Q_1 q_2^2 E_{20}^2 + Q_2 q_3^2 E_{30}^2 + Q_4 q_2 q_3 E_{20} E_{30} + \\ &+ Q_5 q_1^2 E_{20}^2 + Q_6 [q_1^2 E_{30}^2 + (q_2 E_{30} + q_3 E_{20})^2] \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

vereinfacht. Für die Diskussion des Streulichtes führen wir die in Fig. 3 wiedergegebenen Winkel ein. Dadurch erhalten wir für die Vektoren \vec{r} , $\vec{\mathcal{E}}_0$ und \vec{q} die Komponentendarstellung

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \begin{cases} x_1 = r \cos \vartheta' \\ x_2 = r \sin \vartheta' \sin \psi' \\ x_3 = -r \sin \vartheta' \cos \psi' \end{cases} \\ \vec{\mathcal{E}}_0 &= \begin{cases} E_{10} = 0 \\ E_{20} = E_0 \cos (\psi' + \chi') \\ E_{30} = E_0 \sin (\psi' + \chi') \end{cases} \\ \vec{q} &= \begin{cases} q_1 = \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ q_2 = \cos \psi' \cos \varphi' - \sin \psi' \sin \varphi' \cos \vartheta' \\ q_3 = \sin \psi' \cos \varphi' - \cos \psi' \sin \varphi' \cos \vartheta'. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Es mögen nunmehr die Spezialfälle behandelt werden, die sich durch besondere Wahl der Richtung des einfallenden Lichtvektors $\vec{\mathcal{E}}_0$, der Beobachtungsrichtung \vec{r} und der Analysatorstellung \vec{q} ergeben. In den Tabellen 1 bzw. 2 sind die verschiedenen Möglichkeiten zusammengestellt, die sich ergeben, wenn das einfallende Licht parallel bzw. senkrecht zur Magnetfeldrichtung schwingt. Im besonderen sind auch die Spezialfälle völliger Unordnung und völliger Ausrichtung der Teilchen sowie kugelförmige Partikelgestalt angegeben. Dabei wurden die Abkürzungen

$$A = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^4 \frac{NV}{r^2} E_0^2 \quad \text{und} \quad \tilde{A} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^4 NV E_0^2$$

eingeführt.

Tabelle 1. $\mathfrak{E}_0 \parallel \mathfrak{E}^{(0)} \left(\psi' + \chi' = \frac{\pi}{2}; E_{z0} = 0 \right)$.

$$J_{Sq}(\tau) = A [q_z^2(Q_2 + Q_6) + Q_6]$$

$$\text{Ohne Analysator: } J_S^{\parallel}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{Sq}^{\parallel} d\varphi' = A [(Q_2 + Q_6)(\sin^2 \psi' + \cos^2 \psi' \cos^2 \theta') + 2Q_6]$$

$$\text{Gesamte Streuintensität: } J_{S\text{ges}}^{\parallel} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} J_S^{\parallel}(\tau) \tau^2 \sin \theta' d\theta' d\psi' \\ = \tilde{A} (Q_2 + 2Q_6),$$

$$\begin{array}{c|c|c} & H^{(0)} \rightarrow 0 & H^{(0)} \rightarrow \infty \\ \hline \text{speziell:} & \tilde{A} \begin{array}{c} 2 |\alpha_{xz}|^2 + |\alpha_{zz}|^2 \\ 3 \end{array} & \tilde{A} |\alpha_{zz}|^2 \quad \tilde{A} |\alpha|^2 \\ \hline & \text{Kugeln} & \end{array}$$

	τ in der Ebene u. $\hat{N}^{(0)}$	$(\psi' = 0)$
	$J_{Sq}(\psi' = 0) = 1 \cos^2 \varphi' \cos^2 \theta' (Q_2 + Q_6) + Q_6$	
	$q \parallel \hat{N}^{(0)} \quad \left(\psi' = \frac{\pi}{2} \right)$	$q \perp \hat{N}^{(0)} \quad (\psi' = 0)$
speziell:	$J_{S\perp}(\psi' = 0) = 1 [(Q_2 + Q_6) \cos^2 \theta' + Q_6]$	$J_{S\perp}(\psi' = 0) = 1 Q_2$
$H^{(0)} \rightarrow 0$	$= A \{ \dots \}_0$	$= A Q_{20}$
$H^{(0)} \rightarrow \infty$	$= A \alpha_{xz} ^2 \cos^2 \theta'$	$= A \alpha_{zz}^2$
Kugeln	$= A \alpha^2 \cos^2 \theta'$	$= A \alpha^2$
Ohne Analysator:	$J_S^{\parallel}(\psi' = 0) = A [(Q_2 + Q_6) \cos^2 \theta' + 2Q_6]$	$J_S^{\parallel}(\psi' = \frac{\pi}{2}) = A (Q_2 + Q_6)$

Tabelle 2. $\mathfrak{E}_0 \perp \mathfrak{H}^{(0)} \quad (\psi' + \chi' = \pi; \quad E_{30} = 0).$

$J_{S\,q}^\perp(\tau) = A [q_1^2 Q_6 + q_2^2 Q_1 + q_3^2 Q_6]$

Ohne Analysator: $J_S^\perp(\tau) = A [(Q_6 - Q_6) \sin^2 \theta' + (Q_1 - Q_6) (\cos^2 \psi' + \sin^2 \psi' \cos^2 \theta') + 2 Q_6]$

Gesamte Streuintensität: $J_{S\,ges}^\parallel = \tilde{A} [Q_1 + Q_6 + Q_6],$

$H^{(0)} \rightarrow 0 \qquad H^{(0)} \rightarrow \infty$
speziell: $\frac{\tilde{A}}{3} (2 \alpha_{xx}^2 + \alpha_{zz}^2) \mid \tilde{A} \mid \alpha_{xx}^2 \mid \tilde{A} \mid \alpha^2$

\mathbf{r} in der Ebene $(\mathfrak{n}, \mathfrak{H}^{(0)}) \quad (\psi' = 0)$		$\mathbf{r} \perp \mathfrak{H}^{(0)} \quad (\psi' = \frac{\pi}{2})$	
speziell: $H^{(0)} \rightarrow 0$ $H^{(0)} \rightarrow \infty$ Kugeln	$J_{S\,q}^\perp(\psi' = 0)$ $= A [\cos^2 \varphi' (Q_1 - Q_6) + \sin^2 \theta' \sin^2 \varphi' (Q_6 - Q_6) + Q_6]$ $q \perp (\mathfrak{n}, \mathfrak{H}^{(0)}) \quad (\psi' = \frac{\pi}{2})$	$J_{S\,q}^\perp(\psi' = \frac{\pi}{2}) = A [\sin^2 \varphi' (Q_6 \sin^2 \theta' + Q_1 \cos^2 \theta') - Q_6]$ $q \perp \mathfrak{H}^{(0)} \quad (\varphi' = 0)$	Q_6
	$J_{S\,a}^\perp(\psi' = 0) = A [(Q_6 - Q_6) \cos^2 \theta' + Q_5]$ $= A Q_{50}$ $= 0$ $= 0$	$J_{S\,a}^\perp(\psi' = \frac{\pi}{2}) = A Q_6$ $J_{S\,a}^\perp(\psi' = \frac{\pi}{2}) = A [(Q_1 - Q_6) \cos^2 \theta' - Q_6]$ $= A \{ \dots \}_0$ $= A [\alpha_{xx}^2 \cos^2 \theta']$ $= A [\alpha^2 \cos^2 \theta']$	Q_5
Ohne Analysator: $J_S^\perp(\psi' = 0) = A [Q_1 + Q_6 + (Q_5 - Q_6) \sin^2 \theta']$		$J_S^\perp(\psi' = \frac{\pi}{2}) = A (Q_5 \sin^2 \theta' + Q_1 \cos^2 \theta' + Q_6)$	

Für den Depolarisationsgrad Δ des Streulichtes ergibt sich für eine Beobachtungsrichtung $\mathbf{r} \perp \mathbf{n} (\vartheta' = \frac{\pi}{2})$ bei $\mathfrak{E}_0 \parallel \mathfrak{H}^{(0)}$ mit

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} \parallel \mathfrak{H}^{(0)}: \Delta(\vartheta' = 0) &= \left(\frac{J_{S\perp}^1}{J_S^1} \right)_{\vartheta'=0} = \frac{Q_6}{Q_2 + Q_6}, \\ \text{bzw.} \\ \mathbf{r} \perp \mathfrak{H}^{(0)}: \Delta(\vartheta' = \frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{J_{S\perp}^1}{J_S^1} \right)_{\vartheta'=\frac{\pi}{2}} = \frac{Q_6}{Q_2} \end{aligned} \right\} \quad (69a)$$

und bei $\mathfrak{E}_0 \perp \mathfrak{H}^{(0)}$ mit

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} \parallel \mathfrak{H}^{(0)}: \Delta(\vartheta' = 0) &= \left(\frac{J_{S\perp}^1}{J_S^1} \right)_{\vartheta'=0} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_6}, \\ \text{bzw.} \\ \mathbf{r} \perp \mathfrak{H}^{(0)}: \Delta(\vartheta' = \frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{J_{S\perp}^1}{J_S^1} \right)_{\vartheta'=\frac{\pi}{2}} = \frac{Q_6}{Q_5}. \end{aligned} \right\} \quad (69b)$$

Bei völliger Orientierung verschwindet also die Depolarisation $\Delta(\vartheta' = \frac{\pi}{2})$ und $\Delta(\vartheta' = 0)$.

Ist das einfallende Licht unpolarisiert, so erhält man das zugehörige Streulicht durch Mittelung über χ , was darauf hinausläuft, daß man zusammengehörige Ergebnisse der Tabelle 1 und 2 addiert und durch 2 dividiert (Tabelle 3).

Tabelle 3. Einfallendes Licht ist unpolarisiert; Intensität $J = E_0^2$.

$$J_{Sq}^O(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (J_{Sq}^1 + J_{Sq}^1) = \frac{A}{2} [q_1^2(Q_5 - Q_2) + q_2^2(Q_1 - Q_2) + Q_2 + Q_6]$$

also z. B.:

Ohne Analysator:

$$J_S^O(\mathbf{r}) = \frac{A}{2} [Q_1(\cos^2 \vartheta' + \sin^2 \vartheta' \cos^2 \vartheta') + Q_2(\sin^2 \vartheta' + \cos^2 \vartheta' \cos^2 \vartheta') + 2Q_6]$$

Gesamte Streuintensität:

$$J_{S\text{ges}}^O = \frac{A}{2} [Q_1 + Q_2 + Q_5 + 3Q_6].$$

	$H^{(0)} \rightarrow 0$	$H^{(0)} \rightarrow \infty$	Kugeln
speziell:	$\frac{\tilde{A}}{3} (2 - \alpha_{xx}^2 + \alpha_{zz}^2)$	$\frac{\tilde{A}}{2} (\alpha_{xx}^2 + \alpha_{zz}^2)$	$\tilde{A} \alpha ^2$
usw.			

Für unpolarisiert einfallendes Licht beträgt also die Depolarisation $(\mathbf{r} \perp \mathbf{n})$ bei

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} \parallel \mathfrak{H}^{(0)}: \Delta^O(\vartheta' = 0) &= \left(\frac{J_{S\perp}^O}{J_S^O} \right)_{\vartheta'=0} = \frac{Q_5 + Q_6}{Q_1 + Q_6}, \\ \text{bzw. bei} \\ \mathbf{r} \perp \mathfrak{H}^{(0)}: \Delta^O(\vartheta' = \frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{J_{S\perp}^O}{J_S^O} \right)_{\vartheta'=\frac{\pi}{2}} = \frac{Q_5 + Q_6}{Q_2 + Q_6}. \end{aligned} \right\} \quad (69c)$$

Beide Größen verschwinden bei vollständiger Orientierung.

C. Die Polarisation des Lichtes, hervorgerufen durch anisotrope, konservative Absorption.

Durch die seitliche Zerstreuung des Lichtes erleidet der durchgehende Lichtstrahl eine (konservative) Absorption. Diese ist in einem transversalen Magnetfeld für parallel und senkrecht schwingendes Licht verschieden. Nach Tabelle 1 bzw. 2 erhält man für die gesamte Streuintensität eines Volumenelementes mit der Länge dx und dem Querschnitt 1

$$dJ_{S_{\text{ges}}}^{\parallel} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^4 N (Q_2 + 2Q_6) J^{\parallel} dx$$

bzw.

$$dJ_{S_{\text{ges}}}^{\perp} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^4 N (Q_1 + Q_5 + Q_6) J^{\perp} dx,$$

woraus sich für die Absorptionskoeffizienten ergibt

$$\left. \begin{aligned} h_{S^{\parallel}} &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^4 N (Q_2 + 2Q_6) \\ h_{S^{\perp}} &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^4 N (Q_1 + Q_5 + Q_6). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Damit folgt nach Gl. 1.4 für die Polarisation des durchgehenden Lichtes, bedingt durch Streuung

$$P_S = \Im g [(3 S_2(u; v) - 1) R_S] \quad (71)$$

mit der dimensionslosen Größe

$$R_S = \frac{(2\pi)^5}{3\lambda_0^4} L N V_T^2 (|\alpha'_{zz}|^2 - |\alpha'_{xx}|^2). \quad (72)$$

D. Vergleich der Formeln für P_S und P_J .

Die Polarisation P_S hat bezüglich der magnetisch-thermischen Glieder dieselbe Gestalt wie P_J . In beiden Fällen tritt der Term $3 S_2(u; v) - 1$ auf. Das diesbezüglich oben (Abschnitt 4D) für P_J Gesagte gilt also auch für P_S .

Das das optische Verhalten beschreibende Glied R_S ist von R_J etwas verschieden. Beide Größen sind proportional der Anzahl der Teilchen im Lichtweg, aber weil R_J durch den metallischen Charakter der Teilchen bedingt wird, ist $R_J \sim \lambda_0^{-1}$, während die Größe R_S , die auch bei rein dielektrischen Partikeln stets vorhanden ist, zu λ_0^{-4} proportional ist. Das hat allein aus Dimensionsgründen zur Folge, daß einerseits $R_J \sim V_f$, andererseits aber $R_S \sim V_f^2$ ist. Im Abschnitt 4D wurde nachgewiesen, daß die Differenz der Imaginärteile $\Im(\alpha'_{xx} - \alpha'_{zz})$ und damit R_J im allgemeinen, d.h. außerhalb des Kreises K , positiv ist. Auf analoge Weise läßt sich für die Differenz der Absolutquadrate $\alpha'_{zz}{}^2 - \alpha'_{xx}{}^2$,

d.h. also auch für R_s , zeigen, daß sie in demselben Gebiet der Σ -Ebene positiv ist. Sowohl konsumptive Absorption als auch Streuung liefern einen positiven Dichroismus.

Wegen der Additivität der Absorptionskoeffizienten ergibt sich die gesamte Polarisation P zu

$$P = \mathfrak{Z}g [(3 S_2 - 1) R] \quad \text{mit} \quad R = R_J + R_S. \quad (73)$$

Bei kleinen Polarisationsgraden, wie sie im Experiment auftraten, läßt sich der $\mathfrak{Z}g$ entwickeln:

$$P \approx (3 S_2 - 1) R. \quad (74)$$

6. Zusammenhang zwischen Theorie und Experiment.

Man kann nicht erwarten, daß die Größe der Polarisation des durchgehenden Lichtes, die sich nach Gl. (73) berechnet, mit den experimentell gemessenen Werten in (I) übereinstimmt, da unsere Theorie in optischer Hinsicht auf Teilchen beschränkt ist, die kleiner als die Lichtwellenlänge λ sind, während die im Experiment verwendeten Partikel von der gleichen Größenordnung und größer als λ waren. Bevor wir jedoch hierauf näher eingehen, mögen zunächst die magnetischen Verhältnisse untersucht werden. Man kann den magnetischen Teil vom optischen getrennt behandeln, da sich die Polarisation als Produkt von einem magnetischen $(3 S_2 - 1)$ und einem optischen (R) Term ergibt. In magnetischer Hinsicht werden die theoretischen Formeln auch quantitativ das Experiment richtig beschreiben, weil ja diesbezüglich keine wesentlich einschränkenden Voraussetzungen gemacht wurden.

A. Die magnetische Abhängigkeit.

Nach experimentellen Untersuchungen von R. HAU und L. SCHOEN [8] besitzen die spontan magnetisierten Elementarbezirke von γ - Fe_2O_3 eine ungefähre Längendimension von 40 Å und damit ein Volumen von rund 10^{-19} cm^3 . Unsere experimentell untersuchten Teilchen von 10^{-12} cm^3 enthalten daher etwa 10^7 WEISSsche Bezirke und können daher nicht als Ganzes spontan magnetisiert sein. Es hat also seine Berechtigung, wenn wir von einer Suszeptibilität des Teilchens sprechen. Die reversible Suszeptibilität χ ist nach R. GANS [5] lediglich eine Funktion der Anfangssuszeptibilität χ_r , der Sättigungsmagnetisierung M_s und dem Ordinatenwert M , von dem das reversibel durchlaufene Geradenstück in der M, H Ebene ausgeht. In der Fig. 4 ist χ/χ_r als Funktion von M/M_s dargestellt. Die Magnetisierung M können wir annähernd der Größe M_p und diese größenordnungsmaßig der Remanenz M_R ($\approx \frac{1}{2} M_s$) des Teilchenmaterials gleichsetzen.

Um die magnetische Abhängigkeit der Polarisation des Lichtes zu ermitteln, werde jene Feldstärke bestimmt, die einen bestimmten Prozentsatz der Sättigungspolarisation P_∞ hervorruft

$$\frac{P}{P_\infty} = \frac{1}{2} (3 S_2 - 1). \quad (75)$$

Da nicht nach dem absoluten Wert der Polarisation gefragt wird, geht die optische Größe R nicht ein, und es kann so die Theorie mit dem Experiment verglichen werden. Die Funktion $S_2(u; v)$, die den magnetischen Teil der Polarisation beschreibt, ist im Anhang (Fig. 9)

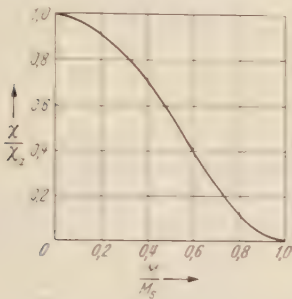


Fig. 4.

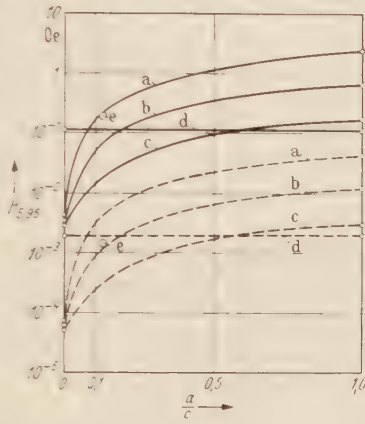


Fig. 5.

 Fig. 4. Verlauf von χ/χ_a als Funktion von M/M_s nach R. GANS [5].

Fig. 5. Die Feldstärken H_s (gestrichelt) und $H_{s,s}$ (ausgezogen) als Funktion des Achsenverhältnisses a/c ($T = 293^\circ \text{ K}$, $V_T = 10^{-18} \text{ cm}^3$). a) 50% Fe + 50% Ni: $\chi = 150$, $M_p = 550 \text{ G}$. b) 100% Fe: $\chi = 50$, $M_p = 650 \text{ G}$. c) Stahl: $\chi = 15$, $M_p = 800 \text{ G}$. d) $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$: $\chi = 0,04$, $M_p = 20 \text{ G}$ [9]. e) Die Kreise entsprechen den experimentellen Untersuchungen an $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ -Teilchen (I, Fig. 5).

dargestellt. Eliminiert man aus u und v in Gl. (27) die magnetische Feldstärke

$$v = A u^2, \quad (76)$$

so findet man für

$$A = \frac{k T}{2 V_T} \left(\frac{\chi}{M_p} \right)^2 \frac{1 + N_z \chi}{1 + N_x \chi} (N_x - N_z). \quad (77)$$

Für ein bestimmtes Teilchenmaterial und vorgegebene Größe und Gestalt der Partikel läßt sich also der Wert von A berechnen. Bringt man nun in Fig. 9 die Linie $v = A u^2$ mit den Kurven $S_2(u; v)$ zum Schnitt, so erhält man für einen vorgelegten Bruchteil P/P_∞ , d.h. nach Gl. (75) für ein bestimmtes S_2 , das zugehörige u und damit das gesuchte Magnetfeld

$$H^{(0)} = u \cdot \frac{k T}{V_T} \frac{1 + N_z \chi}{M_p}. \quad (78)$$

In der Fig. 5 sind die so berechneten Magnetfeldstärken, bei denen die Polarisation des Lichtes 5 bzw. 95% des Sättigungswertes beträgt, in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis a/c für verschiedene Materialien

aufgetragen ($T = 293^\circ \text{ K}$, $V_f = 10^{-12} \text{ cm}^3$). Bei geringer Suszeptibilität, wie sie etwa bei $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ vorliegt, ergibt sich für die Feldstärken ein nahezu horizontaler Verlauf, denn für $z \rightarrow 0$ verschwindet A und $H^{(0)}$ wird von a/c unabhängig. Wenn wir das theoretisch gefundene Ergebnis mit den experimentellen Werten nach I, Fig. 5) H_5 bzw. H_{95} , die in Fig. 5 durch Kreise wiedergegeben sind, vergleichen, so können wir in magnetischer Hinsicht von einer guten quantitativen Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sprechen. Für alle Materialien erfolgt der Abfall der Polarisation von 95 auf 5 % innerhalb von 1 bis 2 Zehnerpotenzen der Feldstärke. Bei Teilchen mit großer Suszeptibilität (z. B. Fe) ist eine starke Abhängigkeit vom Achsenverhältnis vorhanden. Im anderen Extremfall diam- und paramagnetischer Substanzen ($R_f = 0$, $|\chi| \approx 10^{-6}$; $A = \infty$), in dem $S_2(u=0; v)$ maßgebend ist, tritt an Stelle von Gl. (78)

$$H^{(0)} = \sqrt{2v} \frac{kT}{V_f} \frac{1}{(N_x - N_z) \chi^2}, \quad (79)$$

wonach sich zur Erzielung eines Polarisationswertes 10^5 bis 10^6 Oe (bei $V_f \approx 10^{-12} \text{ cm}^3$, $T = 293^\circ \text{ K}$) als nötig erweisen. Damit ist das Fehlen einer Polarisation durch ZnO-Rauch bei 5000 Oe, wie in I festgestellt wurde, verständlich.

B. Die optische Abhängigkeit.

Der Wert der Sättigungspolarisation $P_\infty \approx 2a(2R_{\text{eff}})$, der sich aus den Gl. (48), (72) und (73) berechnet, stimmt wegen der in dieser Theorie vorausgesetzten sehr kleinen Teilchengrößen mit den experimentell gemessenen Werten (I, Fig. 5) *nicht* überein. Wir können jedoch — insbesondere im Hinblick auf die folgenden astrophysikalischen Anwendungen — unsere experimentellen Ergebnisse zur Einführung einer effektiven Größe R_{eff} benutzen, die die optische Seite des Polarisations-effektes für Teilchen der in (I) vorliegenden Dimensionen beschreibt. Aus Gl. (I.6) und $P_\infty \approx 2R_{\text{eff}}$ folgt $R_{\text{eff}} = 725 E_1$, so daß man für die Polarisation erhält

$$P = 725 (3 S_2 - 1) E_1 \quad (E_1 \text{ in cm}). \quad (80)$$

7. Anwendung auf die Polarisation des Sternlichtes.

Die partielle lineare Polarisation, die das Sternlicht durch die interstellare Materie erfährt, ist proportional dem Farbschleiß und zwar gilt, wenn man diese astronomische Größe auf E_1 umrechnet (vgl. Gl. (I.8))

$$P_{\text{astr}} = 500 E_1 \quad (E_1 \text{ in cm}).$$

Aus Gl. (80) ergibt sich damit

$$S_2(u; v)_{\text{astr}} = 0,56, \quad (81)$$

d.h. die Polarisation des Sternlichtes beträgt 34% der Sättigungspolarisation. Welche Schlüsse können wir hieraus auf die galaktische Feldstärke ziehen? Die Größen u und v enthalten neben Teilchengröße und -gestalt das Magnetfeld, die Temperatur und die magnetischen Materialkonstanten χ und M_s . Um magnetisch verschiedene Teilchen gleicher Größe ($V_T = 10^{-12} \text{ cm}^3$) und Gestalt ($\alpha = 8$) diskutieren zu können, wollen wir annehmen, daß deren optisches Verhalten ungefähr dem des $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ entspricht, so daß wir mit demselben R_{eff} und damit mit dem gleichen Zahlenwert in Gl. (80) rechnen können.

Unter Benützung von Gl. (77), (78) und der Fig. 9 ergibt sich aus $S_2 = 0,56$ für $H^{(0)}/T$ die in Fig. 6 wiedergegebene Abhängigkeit von der Suszeptibilität, wobei die permanente Magnetisierung und die Temperatur als Parameter die verschiedenen Kurven kennzeichnen. Faßt man ein festes $M_p (\neq 0)$ ins Auge, so ist bei nicht zu hoher Temperatur und kleinem χ der Wert von $H^{(0)}/T$ unabhängig von T und χ . In diesem Fall ist nämlich 1 so klein ($\approx 10^{-3}$), daß man mit der Funktion $S_2(u; v \approx 0)$ rechnen kann, so daß die Größe u eine Konstante ($\approx 3,15$) wird:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\frac{H^{(0)}}{T} \right) = \frac{3,15 \cdot k}{V_T M_p}. \quad (82)$$

Bei größerem χ macht sich die Entmagnetisierung für „hohe“ Temperaturen durch einen Abfall von $H^{(0)}/T$ bemerkbar, während sich für „niedrige“ Temperaturen ein Anstieg ergibt ($10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3$). Die Kurven nähern sich für großes χ ($1 \cdot 10^3$, $u \approx 0$, $v \approx 2,35$) dem Grenzwert

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \left(\frac{H^{(0)}}{T} \right) = \sqrt{\frac{4,7 \cdot k N_x \tilde{N}_s}{V_T T (N_x - N_s)}}. \quad (83)$$

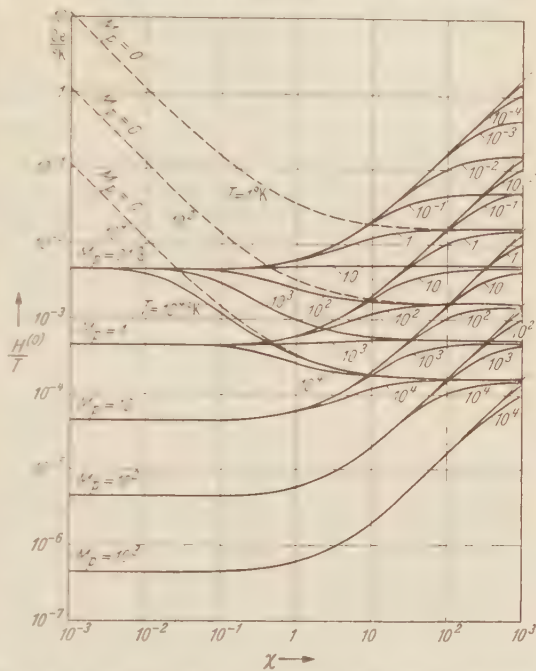


Fig. 9. Abhängigkeit des Verhältnisses $H^{(0)}/T$ als Funktion von χ . Permanente Magnetisierung M_p und Temperatur T als Parameter.

Dieser Limes ist um so größer, je mehr das Ellipsoid Kugelgestalt besitzt ($N_i \approx N_j$). Liegen sehr dünne Nadeln vor ($N_i \rightarrow 0$), so geht der Grenzwert gegen Null.

Für verschwindenden permanenten Magnetismus (Dia- und Paramagnetica, ideal weiche Ferromagnetica) wird für alle Suszeptibilitäten $\lambda = \infty$. Die zugehörigen Kurven sind in Fig. 6 gestrichelt eingezeichnet. Sie nähern sich für großes χ ebenfalls dem Limes (83).

Die magnetischen Größen M_r und χ sind von der Temperatur T_i im Inneren des Teilchens, die man für die interstellare Materie etwa zu 3 bis 10° K annimmt, abhängig. Nach HARRISON (7) nimmt die Remanenz und Koerzitivkraft in ungefähr derselben Weise wie die Sättigungsmagnetisierung mit abnehmender Temperatur zu, so daß man dasselbe Verhalten auch für M_r erwarten kann. Wegen der hohen CURIE-Temperaturen werden jedoch die Werte von M_r bei tiefen Temperaturen nur wenig größer sein als bei Zimmertemperatur. Wählen wir als obere Grenze von M_r die Sättigungsmagnetisierung von Eisen und als untere die Remanenz von γ -Fe₂O₃, so erhalten wir den Bereich

$$20 \leq M_p \leq 1,7 \cdot 10^3 G. \quad (84)$$

Die Anfangssuszeptibilität beträgt bei tiefen Temperaturen nach Messungen von KAMERLINGH ONNES und PIERRE (11) etwa ein Viertel derjenigen bei Zimmertemperatur.

Im Gegensatz zu T_i bedeutet die in unseren Formeln auftretende Größe T jene kinetische Temperatur, die der Orientierung des Staubes entgegenwirkt. Sie ist im wesentlichen durch die Zusammenstöße der Staubteilchen mit dem interstellaren Gas bedingt. Besteht zwischen Gas und Staub thermisches Gleichgewicht, so ist T die Temperatur des interstellaren Gases, wofür wir in den HI-Regionen etwa 30° K annehmen können. Damit erhalten wir für die galaktische Magnetfeldstärke $H_{gal}^{(10)}$ je nach dem zugrunde gelegten ferromagnetischen Material

$$7,5 \cdot 10^{-6} \leq H_{gal}^{(10)} \leq 6 \cdot 10^{-4} \text{ Oe} \quad (85)$$

Dieser Wert des interstellaren Magnetfeldes hat die heute üblicherweise angenommene Größenordnung. Der von SPITZER und TUKEY gefundene, um etwa 2 Zehnerpotenzen kleinere Wert beruht im wesentlichen auf der von ihnen kleiner angenommenen Teilchengröße. Unsere Messungen der Wellenlangenabhängigkeit der Extinktion von länglichen Teilchen mit einem mittleren Volumen $V_f = 10^{-12} \text{ cm}^3$ berechtigt jedoch unsere Annahme.

Mathematischer Anhang.

A. Rekursionsformeln.

Das elementar nicht auswertbare Integral

$$\Phi_{\varrho}(u; v) = \int_0^{\pi} e^{u \cos \vartheta - v \sin^2 \vartheta} \cos^{\varrho} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots), \quad (u, v \geq 0),$$

das durch $\xi = \cos \vartheta$ in

$$\Phi_{\varrho}(u; v) = e^{-v} \int_{-1}^{+1} e^{u\xi + v\xi^2} \xi^{\varrho} d\xi$$

übergeht, genügt der Rekursionsformel

$$e^{uv} \frac{\partial \Phi_{\varrho}}{\partial u^{\mu}} = \Phi_{\varrho+\mu},$$

so daß man sich auf die Berechnung der Funktion Φ_0 beschränken kann, da alle anderen Funktionen daraus durch bloße Differentiation nach u entstehen. Die Ableitung nach v liefert die weitere Rekursionsformel

$$\frac{\partial^{\mu} e^v \Phi_{\varrho}}{\partial v^{\mu}} = e^v \Phi_{\varrho+2\mu}.$$

Damit ergibt sich für die Funktionen $S_{\varrho}(u; v) = \frac{\Phi_{\varrho}(u; v)}{\Phi_0(u; v)}$

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} = S_{\varrho+1} - S_1 S_{\varrho} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S_{\varrho}}{\partial v} = S_{\varrho+2} - S_2 S_{\varrho}.$$

B. Das Integral $\Phi(\eta)$.

Das Integral $\Phi_0(u; v)$ nimmt durch die Substitution $\xi = \frac{\eta}{v} - \frac{u}{2v}$ die Form

$$\Phi_0(u; v) = \frac{e^{-s}}{\sqrt{v}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{\eta^2} d\eta$$

an. Mit den Bezeichnungen $f = \frac{u}{2v}$, $s = v(f^2 + 1)$ lauten die Grenzen des Integrals

$$\eta_1 = \sqrt{v}(f-1), \quad \eta_2 = \sqrt{v}(f+1)$$

oder

$$\eta_1^2 = s - u, \quad \eta_2^2 = s + u.$$

Wir spalten das Integral $\int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{\eta^2} d\eta$ in die Differenz $\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)$ auf, wobei wir unter $\Phi(\eta)$ die Größe

$$\Phi(\eta) = \int_0^{\eta} e^{\gamma^2} d\gamma$$

verstehen wollen. Da diese Funktion offenbar sehr große Werte annehmen kann, ist es zweckmäßig

$$\Xi(\eta) = 2\eta e^{-\eta^2} \Phi(\eta)$$

einzuführen. Wir werden sehen, daß diese Funktion für beliebige η den Wert 1 nicht wesentlich übersteigen kann (vgl. Fig. 8) und daher für die numerische Rechnung mehr geeignet ist.

Potenzreihenentwicklung. Entwickelt man den Integranden und integriert dann gliedweise, so erhält man die konvergenten Potenzreihenentwicklungen

$$\Phi(\eta) = \eta \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\eta^{2\mu}}{(2\mu+1) \cdot \mu!} = \eta \left[1 + \frac{\eta^2}{3} + \frac{\eta^4}{10} + \dots \right]$$

$$\Xi(\eta) = 2\eta^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(2\mu+1) \cdot \mu! \lambda!} \eta^{2(\mu+\lambda)} = 2\eta^2 \left[1 - \frac{2}{3} \eta^2 + \frac{4}{15} \eta^4 - \dots \right].$$

Praktisch brauchbar sind diese Entwicklungen für η bis etwa $\eta = 1,2$. In Fig. 7 findet sich die Funktion $\Phi(\eta)$ bei JAHNKE-EMDE [10] tabelliert.

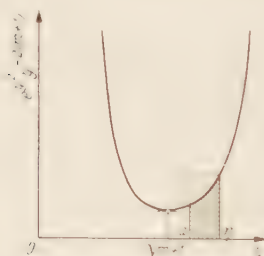


Fig. 7. Zur Abschätzung des Restgliedes R_m .

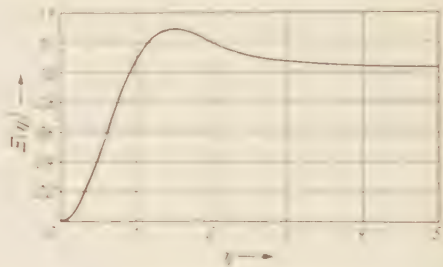


Fig. 8. Die Funktion Ξ in Abhängigkeit von η .

Asymptotische Entwicklung. Durch sukzessive Anwendung der Gleichung

$$2e^{y^2} y^{-2\sigma} = \frac{d}{dy} (e^{y^2} y^{-(2\sigma+1)}) + (2\sigma+1) e^{y^2} y^{-(2\sigma+2)}$$

erhält man für

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{e^{y^2}}{2y} \sum_{\mu=0}^m y^{2\mu} \right] + \frac{m+1}{y^{2(m+1)}} e^{y^2},$$

wobei

$$\varepsilon_\mu = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\mu-1)}{2^\mu} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, m, m+1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 = 1$$

gesetzt wurde. Spaltet man das Integral

$$\int_0^\eta e^{y^2} y^{-2\sigma} dy = \int_0^a e^{y^2} y^{-2\sigma} dy + \int_a^\eta e^{y^2} y^{-2\sigma} dy$$

auf und wendet man auf das zweite Integral die eben abgeleitete Beziehung an, so ergibt sich die für große η wichtige Gleichung

$$\Phi(\eta) = \Phi(a) - \frac{e^{a^2}}{2a} \sum_{\mu=0}^m \varepsilon_\mu a^{-2\mu} + \frac{e^{\eta^2}}{2\eta} \sum_{\mu=0}^m \varepsilon_\mu \eta^{-2\mu} + \varepsilon_{m+1} \int_a^\eta e^{y^2} y^{-2(m+1)} dy.$$

Das letzte Glied können wir abschätzen. Wählt man nämlich a so, daß $\eta = a + \frac{1}{2}m$ erfüllt ist, so folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und der Fig. 7

$$R_m = \varepsilon_{m+1} \int_a^\eta e^{y^2} y^{-2(m+1)} dy \approx \varepsilon_{m+1} e^{\eta^2} \eta^{-2(m+1)} (\eta - a).$$

Für die für große η bequemere Funktion $\Xi(\eta)$ erhält man damit die asymptotische Entwicklung

$$\Xi(\eta) = \eta e^{-\eta^2} \left[2\Phi(a) - \frac{e^{-a^2}}{a} \sum_{\mu=0}^m \varepsilon_{\mu} a^{-2\mu} \right] + \sum_{\mu=0}^m \varepsilon_{\mu} \eta^{-2\mu} + r_m$$

mit dem Rest

$$r_m = 2\eta e^{-\eta^2} R_m \approx 2\varepsilon_{m+1} \eta^{-2m-1} (\eta - a)$$

Diese Entwicklung erlaubt, die Werte von $\Xi(\eta)$ für größere $\eta (> 2)$ zu berechnen, da $\Phi(a)$ bis zu $a=2$ nach [10] als bekannt angesehen werden kann. Der Rest r_m wird im Rahmen der erforderlichen Genauigkeit genügend klein und zwar vor allem je größer η wird. Für $\eta \gg a > 1$ kann man das erste Glied wegen des Faktors $e^{-\eta^2}$ ganz vernachlässigen und im zweiten Glied genügt es bis $m=2$ zu entwickeln

$$\Xi(\eta) \sim 1 + \frac{0,5}{\eta^2} + \frac{0,75}{\eta^4}$$

In Fig. 8 ist der Verlauf der berechneten Kurve $\Xi(\eta)$ ersichtlich.

C. Die Funktionen $S_0(u; v)$.

Durch Differentiation von $\Phi_0(u; v)$ nach u erhalten wir die Funktionen $\Phi_0(u; v)$ und damit $S_0(u; v)$:

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = w \Xi \ln u - f$$

$$S_2 = w (\mathfrak{C} \ln u - f \Xi \ln u) - f \left(f - \frac{1}{u} \right)$$

$$S_3 = w \left[\left(f^2 - 2 \frac{f}{u} + 1 \right) \Xi \ln u - f \mathfrak{C} \ln u \right] - f^2 \left(f - \frac{3}{u} \right)$$

$$S_4 = w \left[\left(f^2 - 3 \frac{f}{u} + 1 \right) \mathfrak{C} \ln u - f \left(f^2 - 5 \frac{f}{u} + 1 \right) \Xi \ln u \right] + f^2 \left(f^2 - 6 \frac{f}{u} + \frac{3}{u^2} \right).$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$w(u; v) = \frac{e^s v^{-\frac{1}{2}}}{\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)} = \frac{2(f^2 - 1)}{(f - 1)e^u \Xi(\eta_2) - (f + 1)e^{-u} \Xi(\eta_1)}$$

eingeführt, die nach dem vorhergehenden Abschnitt als eine bekannte Funktion angesehen werden kann.

Der Verlauf der so berechneten Funktion $S_2(u; v)$ ist in Fig. 9 angegeben. Wir verzichten auf die Wiedergabe der Funktionen mit anderem Index, da nur S_2 in die Formel für die Polarisation des Lichtes einging.

Im folgenden geben wir noch die Grenzfälle $v=0$ (d.h. physikalisch: verschwindende Suszeptibilität) bzw. $u=0$ (d.h. fehlendes magnetisches Moment) an. Wenn diese auch in den obigen Formeln als Spezialfälle enthalten sind, ist es doch einfacher, sie direkt abzuleiten.

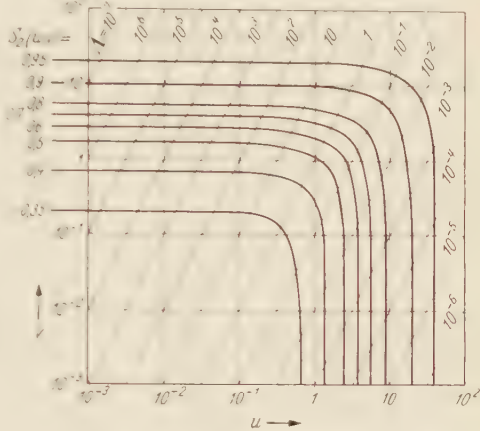


Fig. 9. Die Funktion $S_2(u; v) = \text{const}$ mit $v = 4u^2$.

D. Der Grenzfall $v = 0$ (u beliebig ≥ 0).

Das Integral $\int_{-1}^{+1} e^{u\xi} \xi^q d\xi$ läßt sich durch partielle Integration auswerten. Damit erhält man für $S_q(u; v=0)$:

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = \operatorname{Erg} u - \frac{1}{u}$$

$$S_2 = -\frac{2}{u} \operatorname{Erg} u + \frac{2}{u^2} + 1$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{2}{u^2}\right) \operatorname{Erg} u - \frac{1}{u} \left(1 - \frac{2}{u^2}\right)$$

$$S_4 = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{6}{u^2}\right) \operatorname{Erg} u + \frac{2}{u^4} - \frac{2}{u^2} + 1$$

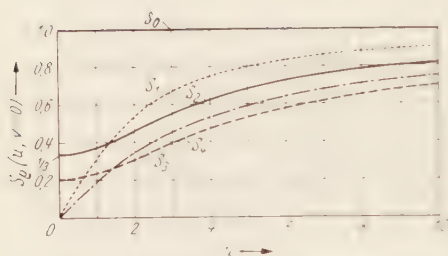


Fig. 10. Die Funktionen S_q in Abhängigkeit von u für $v = 0$.

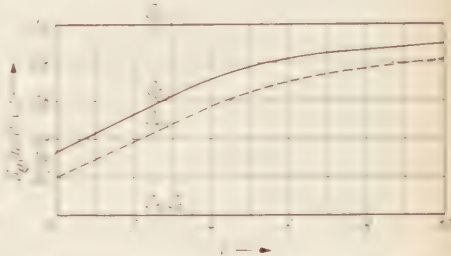


Fig. 11. Die Funktionen S_q in Abhängigkeit von v für $u = 0$.

Für $u \rightarrow 0$ ergibt sich

$$S_0(0) = 1, \quad S_1(0) = 0, \quad S_2(0) = \frac{1}{3}, \quad S_3(0) = 0, \quad S_4(0) = \frac{1}{5},$$

während für große u gilt

$$S_q \sim \frac{1}{u^q}$$

In der Fig. 10 ist die Abhängigkeit $S_q(u; v=0)$ dargestellt.

E. Der Grenzfall $u = 0$ (v beliebig ≥ 0).

Das Integral $\int_{-1}^{+1} e^{v\xi} \xi^q d\xi$ verschwindet für ungerades q . Ist der Index gerade, so lassen sich alle Integrale durch Differentiation von $e^v \Phi_0(u=0; v) = \frac{2}{v} \Phi\left(\frac{1}{v}\right)$ nach v gemäß der oben angegebenen Rekursionsformel berechnen, so daß sich die $S_q(u=0; v)$ zu

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{v^2}\right)$$

$$S_3 = 0$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{v^2}\right) + \frac{3}{4v^4}$$

ergeben. Der Verlauf dieser Funktionen ist aus Fig. 11 ersichtlich.

Herrn Professor Dr. G. HETTNER und Herrn Professor Dr. G. JOOS danke ich für viele wertvolle Hinweise und für das rege Interesse, das sie der Arbeit entgegenbrachten.

Literatur.

- [1] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, S. 136. Leipzig und Berlin 1933. — [2] BORN, M.: Optik. Berlin 1933. — [3] FICK, E.: Z. Physik **138**, 183 (1954). — [4] GANS, R.: Ann. Physik (4) **37**, 881 (1912). — [5] GANS, R.: Phys. Z. **12**, 1053 (1911); vgl. Handbuch der Physik, Bd. 15, S. 173. 1927. — [6] SCHÜTZ, W.: Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 16 1. 1936. — [7] HARRISON, E. P.: Phil. Mag. (6) **8**, 179 (1904). — [8] HAUL, R., u. T. SCHOON: Z. Elektrochem. **45**, 663 (1939). — [9] HERROUN, E. F., and E. WILSON: Proc. Phys. Soc. **41**, 100 (1928). — [10] JAHNKE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen, S. 26. Leipzig 1948. — [11] KAMERLINGH ONNES, H., u. A. PERRIER: Comm. Leiden, Nr. 126; vgl. Handbuch der Physik, Bd. 15, S. 196. 1927. — [12] SPITZER, L., and J. W. TUKEY: Astrophys. J. **114**, 187 (1951).

München, Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule.

Gleichzeitige oszillographische Registrierung von Widerstand und magnetischem Fluß für Indium-Einkristalle im Übergangsgebiet zur Supraleitung bei starker Strombelastung*.

Von

WALTHER MEISSNER und ROBERT DOLL.

(Mitteilung der Kommission für Tieftemperaturforschung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.)

Mit 16 Figuren im Text.

(Eingegangen am 10. Dezember 1954.)

Die mit Kriechgalvanometern und einer Oszillographenschleife aufgenommenen Registrierungen zeigen folgendes:

Die bei langsamer Temperaturänderung auftretenden Änderungen des Widerstandes und des den Supraleiter durchsetzenden magnetischen Flusses erfolgen in synchron verlaufenden Sprüngen. Doch sind die Sprünge bei fallender Temperatur viel ausgeprägter als bei steigender Temperatur, besonders bei Belastung mit Strom ohne äußeres Magnetfeld oder allein mit longitudinalem Magnetfeld ohne zusätzlichen Strom.

Die Auflösungsfähigkeit der Meßanordnung und die Ergebnisse werden diskutiert.

Einleitung.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung war der folgende: Es sollte *gleichzeitig*, was bisher noch nicht geschehen war, der Verlauf der Übergangskurven supraleitend—normalleitend und normalleitend—supraleitend für Widerstand und magnetischen Fluß verfolgt, und wenn möglich photographisch registriert werden, um Einzelheiten über die Art der Übergangskurven für Widerstand und magnetischen Fluß und ihre gegenseitige Zuordnung zu erfahren. Dabei sollte der Belastungsstrom so gewählt werden, daß auch der sog. paramagnetische Effekt, also eine Vergrößerung des magnetischen Flusses¹ eintrat. Die Messungen sollten fluxmetrisch durchgeführt werden aus folgendem Grunde: Bei Anwendung der ballistischen Methode ist erstens eine photographische Registrierung schwierig, zweitens, was besonders schädlich ist, wird der Ver-

* Vorläufige Mitteilung über das Ergebnis der Arbeit siehe MEISSNER, W.: Vorgänge in Supraleitern beim Übergang Normalleitung—Supraleitung, Naturwiss. **41**, 437 (1954). — Sitzgsber. der Bayer. Akad. der Wiss. 2. Juli 1954.

¹ MEISSNER, W., F. SCHEISSNER u. H. MEISSNER: Z. Physik **130**, 521, 520 (1951); **132**, 520 (1952). — Phys. Rev. **90**, 700 (1953). — MENDELSSOHN, K., G. SQUIRE u. TOM S. TEASDALE: Phys. Rev. **87**, 580 (1952). — TEASDALE, TOM S., u. H. E. RORSCHACH jr.: Phys. Rev. **90**, 700 (1953). — THOMPSON, J. C., u. C. F. SQUIRE: Phys. Rev. **96**, 287 (1954).

lauf des Überganges durch die Meßmethode gestört. Denn es wird dabei das äußere Magnetfeld kommutiert und in einer Induktionsspule, die den Supraleiter umgibt ein Spannungsstoß induziert, der mit einem ballistischen Galvanometer gemessen wird. Befindet sich die zu untersuchende Probe im Übergangsgebiet zur Supraleitung, so geht die magnetische Feldstärke beim Kommutieren durch Null. Im Augenblick des Nullwerdens des Magnetfeldes aber wurde demselben Zustand im Übergangsgebiet eine etwas höhere Temperatur entsprechen als vor dem Kommutieren. Da aber die Temperatur konstant bleibt, wird sich ein anderer Zustand einstellen, d.h. es muß ein mehr oder weniger großer Teil der Probe zusätzlich supraleitend werden. Beim Wiederausteigen des Magnetfeldes auf den entgegengesetzten Wert beim Kommutieren des Feldstromes, wird dann die Supraleitung ebenso in einem mehr oder weniger großen Gebiet der Probe wieder zerstört. Der Endzustand, der für den jeweils in der Probe vorhandenen magnetischen Fluß bestimmend ist, wird also bei jedem Meßpunkt durch ansteigendes Magnetfeld erreicht, unabhängig davon, ob die Temperatur bei der Meßreihe gesteigert oder gesenkt wird. Man kann also auf diese Weise nicht erwarten, ein genaues Bild des Flußverlaufes bei stetig fallender oder steigender Temperatur zu erhalten. Ähnlich ist es bei der Aufnahme des sog. paramagnetischen Effektes. Nach der Erklärung, die für die Flußverstärkung gefunden wurde¹, bilden sich auf den Schraubenlinien, auf denen die magnetischen Kraftlinien verlaufen, supraleitende Bereiche von Nadel- oder Spindelform. Wird nun bei festgehaltener Temperatur und konstantem Belastungsstrom das äußere Magnetfeld kommutiert, so müssen die Schraubenlinien ihren Windungssinn umkehren und es müssen sich bei jedem Kommutieren die supraleitenden Bereiche umordnen, so daß auch hierbei ein stetiges Fortschreiten der Vorgänge bei sich ändernder Temperatur verhindert wird. Auf diese beiden Punkte wird weiter unten bei der Diskussion der Ergebnisse noch näher eingegangen. Ein weiterer Nachteil der ballistischen Methode ist folgender: Ist der Widerstand der untersuchten Probe schon oberhalb der Übergangskurve (also im noch normalleitenden Zustand) sehr klein, so klingen die beim Kommutieren des Magnetfeldes in der Probe induzierten Wirbelströme nur sehr langsam ab. Ist die Schwingungsdauer des benutzten ballistischen Galvanometers nicht sehr groß gegen die Abklingzeit der Wirbelströme, so zeigt das Galvanometer den gesuchten Magnetfluß falsch oder sogar überhaupt nicht merklich an. Das letztere war z.B. bei der Untersuchung des paramagnetischen Effektes an dem In-Einkristall der Fall, über dessen fluxmetrische Prüfung im folgenden berichtet wird.

Eine andere, von MENDELSSOHN, SQUIRE und TEASDALE¹ angegebene Methode besteht darin, daß die Induktionsspule von der Probe

¹ Siehe Fußnote 1, S. 340.

heruntergezogen, und der dabei auftretende Induktionsstoß ballistisch gemessen wird. Diese Methode beeinflußt den Übergang nicht, hat aber außer den dabei auftretenden technischen Schwierigkeiten den Nachteil, daß die Kurven punktwise aufgenommen werden müssen.

Die Methode der fortlaufenden fluxmetrischen Registrierung wurde bereits zur Aufnahme des Magnetflußverlaufes benutzt¹, doch war die dabei erzielte Genauigkeit nicht sehr groß. Es gelang uns jetzt aber, die Empfindlichkeit auf ein ausreichendes Maß zu steigern.

1. Proben.

Die Proben, mit denen die Versuche durchgeführt wurden, waren zwei zylindrische In-Einkristalle von je 60 mm Länge und 4,5 mm Durchmesser. Der eine der beiden Einkristalle war durch ein dünnes Glimmerblatt der Länge nach in zwei voneinander isolierte Halbzylinder geteilt und zwar so, daß an oberen und unteren Ende noch eine leitende Verbindung von etwa 2 mm Länge bestehen blieb und der Belastungsstrom daher beide Hälften durchfließen konnte. Beide Proben waren aus sehr reinem In (99,999% In) hergestellt. Leider stellte sich nach Beendigung der Versuche beim Auseinandernehmen der Apparatur heraus, daß der massive Einkristall (offenbar beim Montieren) etwas deformiert worden war. Nach den Enden zu hatten sich einige anders orientierte, kleinere Kristalle gebildet und auch im mittleren Teil waren Gleitlinien feststellbar. Die Orientierung des großen mittleren, noch einkristallinen Teils ist, wie eine optische Achsenbestimmung ergab, die folgende:

Die Längsachse der zylindrischen Probe schließt mit der tetragonalen Hauptachse des Kristalls den Winkel 85° und mit den beiden Nebenachsen die Winkel 27° und 64° ein.

Der Versuch mit der geteilten Probe sollte dazu dienen, die Erklärung der Flußverstärkung durch schraubenförmige Strombahnen nochmals zu prüfen. Bei einem geteilten Zylinder ist trotz schraubenförmigen Magnetfeldes eine Ausbildung fortlaufender, schraubenförmiger Strombahnen nicht möglich, also auch keine Verstärkung des magnetischen Flußes zu erwarten.

2. Flußmessung.

Zur Registrierung des longitudinalen magnetischen Flusses in der In-Probe wurde diese in der üblichen Weise von einer Induktionsspule umgeben und zusammen mit dieser in eine Feldspule gleicher Achsenrichtung gebracht. Die Anordnung im Kivostaten war die gleiche wie früher beschrieben¹. Die Induktionsspule aus Kupferdraht, die die Probe

¹ Siehe Fußnote 1, S. 340.

von $0,16 \text{ cm}^2$ Querschnitt in einer Länge von 50 mm umschloß, hatte 32000 Windungen und eine Gesamtwindungsfläche (mittlere Windungsfläche \cdot Windungszahl) von $1,9 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$. Der Widerstand der Spule beträgt bei 4 K etwa 50Ω . Eine Änderung des magnetischen Flusses in der Probe von Φ_1 auf Φ_2 ergibt in dem angeschlossenen Fluxmeter durch den auftretenden Spannungsstoß die Ausschlagsänderung:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = Su_F \int_1^2 U dt = Su_F (\Phi_2 - \Phi_1) \quad (1)$$

(Su_F Spannungsstoßempfindlichkeit des Fluxmeters).

Für das zeitliche Auflösungsvermögen der Meßanordnung ist erstens die Einstelldauer t_e des Fluxmeters auf einen neuen Meßwert bei sehr kurzdauerndem Spannungsstoß bestimmend, und zweitens die durch Widerstand R und Selbstinduktion L gegebene Zeitkonstante t_K des Meßkreises. t_e ist gegeben durch

$$t_e = \frac{T_0}{2\pi} \frac{\ln 2b}{b} \quad (2)$$

(T_0 Schwingungsdauer des ungedämpften Instrumentes; $b = \frac{R_{gr}}{R_{Kr}}$; R_{gr} aperiodischer Grenzwiderstand; R_{Kr} Meßkreiswiderstand).

Für das verwendete Instrument, ein SIEMENSsches Supergalvanometer, ergab sich bei Anschluß der hochohmigen Spule an die Induktionsspule mit $T_0 = 7 \text{ sec}$, $R_{gr} = 53 \text{ k}\Omega$ und $R_{Kr} = 530 \Omega$

$$t_e = 5,9 \cdot 10^{-2} \text{ sec.}$$

Die Zeitkonstante des Meßkreises beträgt mit $R = 530 \Omega$ und $L = 1,25 \text{ H}$

$$t_K = \frac{L}{R} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$$

Daher ist praktisch das Auflösungsvermögen durch dasjenige des Fluxmeters selbst gegeben. Die Halbwertszeit der Rückbewegung des Fluxmeters betrug etwa 170 sec.

Die photographische Registrierung erfolgte unter Benutzung der Papiertransporteinrichtung eines SIEMENSschen 3-Schleifenoszillographen mit einem Papiervorschub von 10 mm/sec .

3. Widerstandsmessung.

Für die Registrierung des Widerstandsverlaufes der Proben bestand eine Schwierigkeit darin, daß der Restwiderstand der sehr reinen In-Proben nur $3 \cdot 10^{-7} \Omega$ betrug. Eine direkte Registrierung mit einem Galvanometer war selbst bei den durch die Versuchsbedingungen geforderten hohen Belastungsströmen von 4 bis 10 Amp nicht möglich, da Galvanometer geeigneter Empfindlichkeit eine Schwingungsdauer von einigen

Sekunden haben und daher zur Registrierung schnellerer Vorgänge nicht brauchbar sind.

Es wurde deshalb die in Fig. 1 schematisch dargestellte Meßmethode benutzt:

Parallel zur In-Probe mit dem Restwiderstand R_{1a} in normalleitendem Zustand ist eine Spule L_2 aus bei den Versuchstemperaturen stets supra-leitendem Pb—Bi-Draht in Serie mit dem konstanten Kupferwiderstand R_2 geschaltet. Durch diese beiden parallelen Zweige wird der konstant gehaltene Strom $J_0 = J_1 - J_2$ geschickt. R_2 begrenzt den Spulenstrom bei normalleitender In-Probe auf $J_2 = \frac{1}{2} J_0$. Sinkt nun bei Eintritt der Supraleitung R_1 auf den Wert Null, so fällt auch J_2 auf Null ab. Es ist mit

$$J_1 R_1 = J_2 R_2$$

$$R_1 = \frac{J_2 R_2}{J_0 - J_2} = R_2 \left\{ \frac{J_2}{J_0} + \left(\frac{J_2}{J_0} \right)^2 + \left(\frac{J_2}{J_0} \right)^3 + \left(\frac{J_2}{J_0} \right)^4 + \dots \right\} \quad (3)$$

oder

$$\Delta R_1 = \Delta J_2 \frac{R_2}{J_0} \left\{ 1 + 2 \frac{J_2}{J_0} + 3 \left(\frac{J_2}{J_0} \right)^2 + 4 \left(\frac{J_2}{J_0} \right)^3 + \dots \right\}. \quad (4)$$

In erster, oft genügender Näherung ist also R_1 proportional J_2 und ΔR_1 proportional ΔJ_2 , da J_2 nach Voraussetzung höchstens $\frac{1}{2} J_0$ beträgt. Eine Änderung von R_1 um ΔR_1 ändert nun auch den von J_2 in der Spule L_2 erzeugten magnetischen Fluß um einen gewissen, ΔJ_2 proportionalen Betrag $\Delta \Phi$, der durch eine Induktionsspule L_3 mit angeschlossenem Fluxmeter F gemessen wird. Dabei wird die Ausschlagsänderung des Fluxmeters nach (1) und (4)

$$\Delta \alpha = A \cdot \Delta R_1; \quad (5)$$

Die elektrische Bemessung des Fluxmeterkreises war die gleiche, wie sie für die Flußregistrierung bereits angegeben wurde. Das Fluxmeter war ebenfalls ein Siemens-Supergalvanometer. Die Beziehungen (3) mit (5) gelten nur für den stationären Fall. Um das zeitliche Auflösungsvermögen der Meßanordnung zu finden, muß man die Differentialgleichungen für die Ströme J_1 und J_2 heranziehen. Die Differentialgleichung des ersten Kreises der Fig. 1 lautet mit $R_1 = R$ und $J_1 = J_0 - J_2$

$$L_2 \frac{dJ_2}{dt} + L_{23} \frac{dJ_3}{dt} + J_2(R_2 + R) - J_0 R = 0, \quad (6)$$

diejenige des zweiten Kreises

$$L_3 \frac{dJ_3}{dt} + L_{23} \frac{dJ_2}{dt} + J_3 R_3 = 0. \quad (7)$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_3}{dt} \frac{(L_3 L_2 - L_{23}^2)}{L_{23}} + J_3 \frac{[(R_2 + R) L_3 + R_3 L_2]}{L_{23}} + \\ (R_2 + R) \frac{R_3}{L_{23}} \int J_3 dt = -J_0 R, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

darin ist

$$-\int J_3 dt = \varphi \quad (9)$$

die vom Fluxmeter registrierte Größe. Ferner ist nach (9)

$$-J_3 = \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad -\frac{dJ_3}{dt} = \ddot{\varphi}, \quad (10)$$

mit (9) und (10) wird aus (8)

$$\ddot{\varphi} \frac{(L_2 L_3 - L_{23}^2)}{L_{23}} + \dot{\varphi} \frac{[(R_2 + R) L_3 + R_3 L_2]}{L_{23}} + (R_2 + R) \frac{R_3}{L_{23}} \varphi = J_0 R. \quad (11)$$

Damit ist R als Funktion von φ grundsätzlich gegeben.

Die Diskussion von (11) ergibt, daß unter Berücksichtigung der im vorliegenden Fall vorhandenen Werte $R_2 = 6 \cdot 10^{-6} \Omega$, $R_3 = 530 \Omega$, $L_2 = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ H}$, $L_3 = 1,25 \text{ H}$, $L_{23} = 8,6 \cdot 10^{-4} \text{ H}$, statt (11) in genügender Näherung gesetzt werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \left(\dot{\varphi} \frac{L_2}{R_2} + \varphi \right) [1 + \beta \varphi + (\beta \varphi)^2 + \dots] = \frac{L_{23} J_0}{R_2 R_3} R \\ \left(\beta = \frac{R_3}{J_0 L_{23}}; \quad \beta \varphi \leq \frac{1}{21} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Mit Hilfe von (12) kann der Verlauf von R aus der registrierten Funktion q berechnet werden. In erster Näherung ist R proportional q , falls $\dot{q} \frac{L_2}{R_2}$ klein ist gegen φ .

Der ungünstigste Fall wäre der, daß R springt, z.B. für $t=0$ von $R=0$ auf $R=R_1$. Dann ist die Lösung von (12), wenn man den Faktor $[1 + \beta \varphi + (\beta \varphi)^2 + \dots] = 1$ setzt:

$$q = \frac{L_{23} J_0}{R_1 R_3} R_1 \left\{ 1 - e^{-\frac{R_2}{L_2} t} \right\} = A R_1 \left\{ 1 - e^{-\frac{L_2}{R_2} t} \right\}. \quad (13)$$

Im vorliegenden Fall ist die Zeitkonstante $\frac{L_2}{R_2} = 0,2 \text{ sec}$. Infolgedessen hat im ungünstigsten Fall, d.h. beim Sprung von R , q den Wert $A R_1$ nach 0,4 sec bis auf 14% erreicht. Das Glied $\dot{q} \frac{L_2}{R_2}$ ist also zu vernachlässigen, falls die Änderungen von R langsamer als in etwa 0,5 sec erfolgen. Das ist bei langsamer Temperaturänderung meist der Fall. Springt R nicht auf R_1 , sondern auf einen Zwischenwert $R_1' < R_1$ und steigt dann langsam weiter, so ist der Anstieg von q nicht exponentiell,

da R auf R_z in der Zeit $\Delta t = 0$ springt, so daß in den Verlauf von φ auch der Verlauf von R nach Erreichen von R_z mit eingeht.

Wir haben die Frage der Auflösung eingehend untersucht, da sie wohl in früheren Veröffentlichungen anderer Autoren nicht immer genügend genau diskutiert wurde. In manchen Fällen, wo Elektronenröhrenverstärker und dergleichen benutzt wurden, was wir bewußt vermieden haben, dürften Täuschungen durch Eigenschwingungen der Verstärkerbestandteile und dergleichen möglich sein.

Nicht erfaßt werden durch unsere Registrierungen Änderungen von Fluß oder Widerstand, die so rasch aufeinander folgen (rasche Schwingungen), daß aus den registrierten Amplituden, die ohne Korrekturen gegenüber Amplituden langsamer Änderungen schon klein sind, wegen der Strichbreite und dergleichen die wahren Größen nach den Gln. (1) und (12) nicht mehr genau ermittelt werden können.

4. Temperaturmessung.

Auf eine genaue Bestimmung der absoluten Temperatur kam es bei den Versuchen nicht an, es sollte lediglich die Geschwindigkeit der Temperaturänderung bestimmt werden. Dazu wurde das Kondensationsgefäß eines He-Dampfdruckthermometers mit einem Differential-Quecksilbermanometer verbunden, in dessen beiden Schenkeln Platindrähte ausgespannt waren. Die Änderungen des He-Dampfdruckes konnten nun als Widerstandsänderungen der Platindrähte mit einer Brückenschaltung gemessen werden. Die bei der Verstimmung der Brücke auftretende Spannung wurde einer Oszillographenschleife zugeführt und zusammen mit magnetischem Fluß und Widerstand auf den Registrierstreifen des Siemens Oszillographen aufgenommen. Damit unregelmäßiges Haften des Quecksilbers am Platindraht nicht auftrat, durfte das bei den Messungen benutzte Stück des Drahtes nur während der Messungen von Quecksilber benetzt werden. Es war daher eine Vorrichtung angebracht, um das Quecksilber senken und erst bei Beginn der Messungen in die nötige Höhe bringen zu können.

5. Ergebnisse.

Die Ergebnisse sind in den Fig. 2–14 wiedergegeben. Fig. 2 und 3 zeigen zunächst den Verlauf des Widerstandes im Übergangsgebiet bei einem Belastungsstrom von 4 Amp. Bei steigender Temperatur steigt der Widerstand vom Wert 0 bei Supraleitung bis zum Restwiderstand bei Normalleitung einigermaßen kontinuierlich an. Nur kleine Knicke in den Kurven sind vorhanden. Ganz anders verläuft der Widerstandsabfall bei sinkender Temperatur. Man erkennt deutlich drei ausgeprägte Sprünge. In Fig. 3 sind diese Sprünge etwas dichter gedrängt, da die

Temperatur rascher fällt als in Fig. 2. Vielleicht sind die Sprünge den entsprechenden Knicken bei steigender Temperatur zuzuordnen. Der Grund, daß die registrierten Kurven für Fluß und Widerstand am Anfang und am Ende nicht parallel zur Zeitachse verlaufen, liegt einmal an der Rückkriechbewegung des Fluxmeters und außerdem an einem durch Thermokräfte verursachten Gang des Nullpunktes, der nicht immer gleich gut

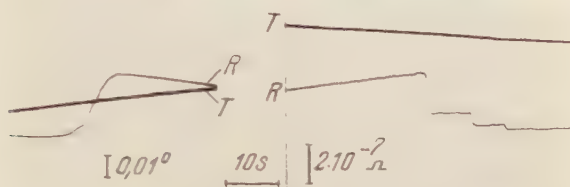


Fig. 2. Registrierung des Widerstandes R allein bei steigender und fallender Temperatur T .
Stromstärke 4 Amp.

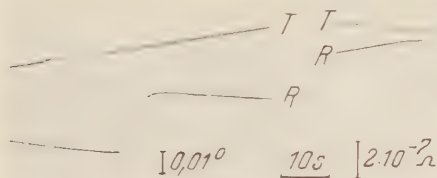


Fig. 3. Registrierung des Widerstandes R allein bei steigender und fallender Temperatur T .
Stromstärke 4 Amp.

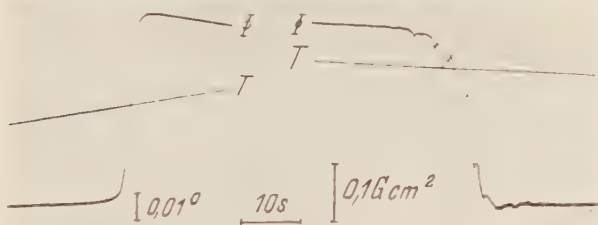


Fig. 4. Registrierung des magnetischen Flusses Φ (Gauß \cdot cm²) allein bei steigender und fallender Temperatur.
Magnetische Feldstärke 2 Oe.

kompensiert werden konnte. Fig. 4 zeigt den reinen Flußverdrängungseffekt ohne Strombelastung bei einer longitudinalen Feldstärke von 2 Oe. Auffallend ist auch hierbei der ziemlich glatte Verlauf der Φ -Kurve bei steigender Temperatur und der unregelmäßige Verlauf bei fallender Temperatur. Man beobachtet sogar wiederholt einen kleinen Wiederanstieg des Flusses während des Verdrängungsvorganges. Die Unstetigkeiten in Fig. 4 sind andersartig als die in Fig. 2 und 3. Die Fig. 5 13

zeigen gleichzeitig Widerstandsverlauf und Flußverlauf mit stärkerer Strombelastung. Dabei tritt der Flußverstärkungseffekt auf. Man erkennt bei allen Aufnahmen deutlich das Maximum des magnetischen

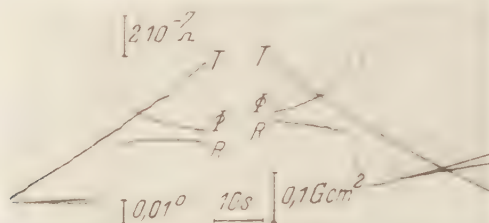


Fig. 5. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 4 Amp. Magnetische Feldstärke 1 Oe.

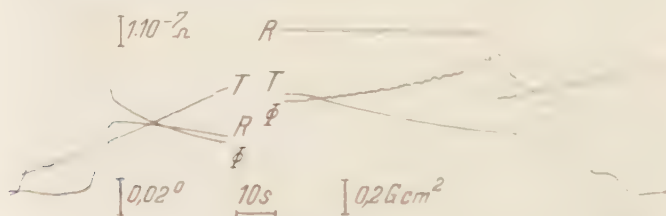


Fig. 6. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 7 Amp. Magnetische Feldstärke 1 Oe.

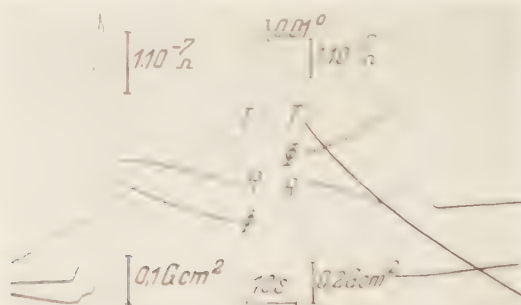


Fig. 7. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 10 Amp. Magnetische Feldstärke 1 Oe. (Verschiedene Maßstäbe bei steigender und fallender Temperatur.)

Flusses, dessen Höhe von den jeweils gewählten Werten von Belastungsstromstärke I und Magnetfeldstärke H abhängen. Auch hier verlaufen die Kurven für R und Φ bei fallender Temperatur wieder stark unregelmäßig. Die stetigen, sowie die unstetigen Änderungen von R und Φ sind aber völlig synchron, d.h. bei fallender Temperatur entspricht in dem

Bereich vor dem Flußmaximum einem Abfall von Φ ein Anstieg von R . Ebenso ist es bei steigender Temperatur in dem Bereich nach dem Flußmaximum. Dies zeigen besonders deutlich die Fig. 10 und 12. Natürlich

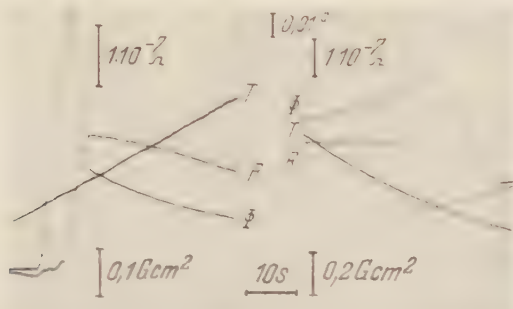


Fig. 8. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 10 Amp. Magnetische Feldstärke 1 Oe. (Verschiedene Maßstabe bei steigender und fallender Temperatur.)

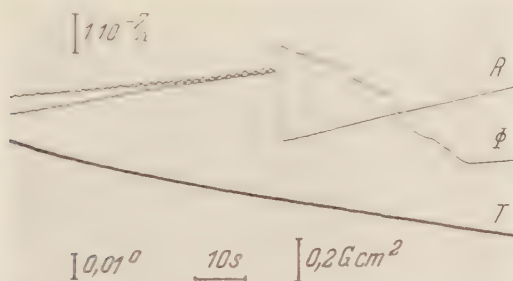


Fig. 9. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei fallender Temperatur. Stromstärke 10 Amp. Magnetische Feldstärke 1 Oe.

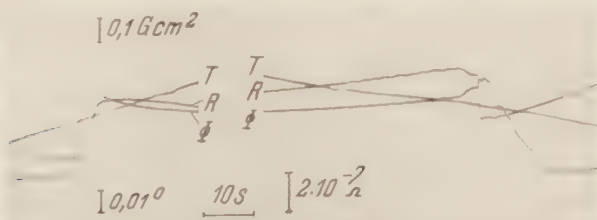


Fig. 10. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 4 Amp. Magnetische Feldstärke 2 Oe.

ist dies nur bei endlichem Widerstand der Probe zu beobachten, sobald sich nämlich eine durchgehende supraleitende Brücke gebildet hat, bleibt der Widerstand null, während der magnetische Fluß sich weiterhin noch

ändert bis die ganze Probe supraleitend ist. Die anfängliche Synchronität von Widerstands- und Flußänderungen zeigt, daß sie beide von den gleichen Vorgängen verursacht werden und spricht für die zu Anfang gegebene Erklärung des Verstärkungseffektes, nämlich daß einzelne supraleitende Bereiche sich in Schraubenlinien anordnen und wohl auch ein gewisses Stück in Richtung der Schraubenlinien wachsen. Mit

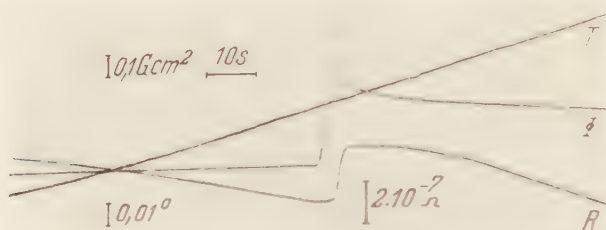


Fig. 11. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei fallender Temperatur. Stromstärke 4 Amp. Magnetische Feldstärke 2 Oe.

jedem neu entstehenden oder wachsenden Bereich wird sowohl der Längswiderstand der Probe kleiner und gleichzeitig erhöht sich der auf der Schraubenbahn fließende Anteil des Bohrstromes und vergrößert den magnetischen Längsfluß. Die Tatsache, daß der Verstärkungseffekt

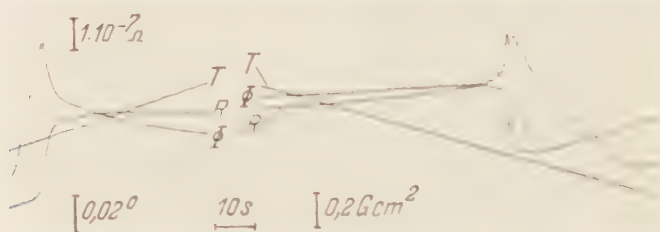


Fig. 12. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 7 Amp. Magnetische Feldstärke 2 Oe.

auch bei steigender Temperatur auftritt, bedeutet, daß hierbei der supraleitende Zustand wieder aufgespalten wird in einzelne supraleitende Bereiche, die ebenfalls wieder auf Schraubenlinien angeordnet sein müssen.

Ein Vergleich der Φ -Kurve der Fig. 10 bei steigender Temperatur mit der Φ -Kurve der Fig. 11 zeigt vollkommene Übereinstimmung, auch in kleinen Einzelheiten. Zwischen beiden Aufnahmen wurde das Übergangsgebiet wiederholt nach oben und unten durchschritten, allerdings wurde die Probe dazwischen nicht über 4,2° K erwärmt. Auch die Aufnahmen mit fallender Temperatur in Fig. 7, 8 und 9 zeigen untereinander ähnlichen Verlauf, insbesondere hat der kleine spontane Sprung vor dem

Flußmaximum überall gleiche Größe. Der Temperaturverlauf war jedoch bei den drei Aufnahmen nicht der gleiche, woraus sich die unvollkommene Übereinstimmung erklären läßt.

Die Werte für die Höhe des auftretenden Flußmaximums streuen bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Temperaturänderung ziemlich. Im

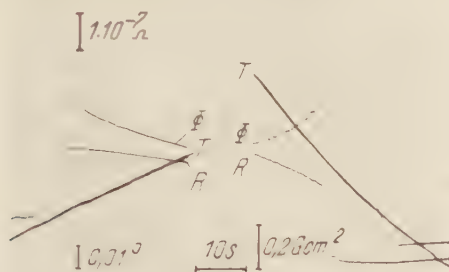


Fig. 13. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 10 Amp. Magnetische Feldstärke 2 Oe.

allgemeinen fällt aber das Maximum bei steigender Temperatur etwas höher aus als bei sinkender. Dies erschwert die Auswertung der fluxmetrischen Aufnahmen zu einer früher¹ gefundenen Beziehung $J_0 = J_s - \gamma H d$

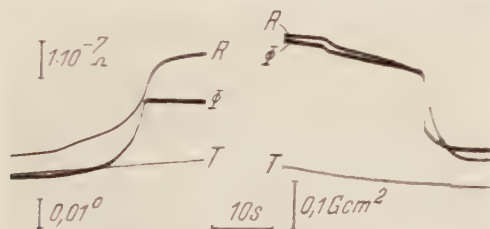


Fig. 14. Gleichzeitige Registrierung von Widerstand R und Fluß Φ für einen durch ein Glimmerblatt in zwei Halbzylinder geteilten Indium-Einkristall bei steigender und fallender Temperatur. Stromstärke 5 Amp. Magnetische Feldstärke 1 Oe.

zwischen der Mindeststromstärke J_0 , bei der eben noch eine Flußverstärkung auftritt und den Größen H und d (H = äußere Feldstärke; d = Probendurchmesser). Außerdem wird die Auswertung auch unsicher, da die wirkliche Höhe der Maxima infolge des bereits erwähnten Nullpunktanges des Fluxmeters nicht immer eindeutig bestimmt werden kann.

Daß die Streuung der Werte für das Flußmaximum bei früheren Messungen nicht in Erscheinung trat, liegt wohl wie schon in der

¹ Siehe Fußnote 1, S. 340.

Einleitung erwähnt, darin begründet, daß bei ballistischen Messungen jeder Meßpunkt durch ansteigendes Magnetfeld erreicht wird, gleichgültig ob bei der Meßreihe die Temperatur langsam gesteigert oder gesenkt wird. Wahrscheinlich ergibt sich deshalb in beiden Fällen gleiche Höhe des Maximums. Ein auffallender Unterschied zwischen den Aufnahmen bei steigender und denen bei fallender Temperatur ist noch folgender:

Bei fallender Temperatur ist der Widerstand bald nachdem der Fluß sein Maximum (oder seine Maxima Fig. 12) durchlaufen hat bereits verschwunden, während der magnetische Fluß erst viel später vollständig verdrängt wird. Bei steigender Temperatur dagegen tritt mit dem ersten eindringenden magnetischen Fluß auch schon ein zwar kleiner, aber merklicher Widerstand der Probe auf. Dies zeigen besonders deutlich Fig. 5, 7 und 8.

Die Aufnahme der Fig. 14 wurde mit dem geschlitzten In-Einkristall erhalten. Dabei tritt in Übereinstimmung mit dem früher¹ gefundenen Ergebnis das Maximum in der Flußkurve nicht auf, da hierbei sich die supraleitenden Bereiche zwar in Richtung des schraubenförmigen Magnetfeldes ordnen können, der Belastungsstrom aber nicht diesen Schraubenbahnen folgen kann. Feinere Einzelheiten gibt die Aufnahme der Fig. 14 nicht wieder, da das Auflösungsvermögen der Meßanordnung für Fluß und Widerstand noch nicht hoch genug und auch die Strichbreite noch größer als bei den übrigen Aufnahmen war, die später als die Messungen für Fig. 14 gemacht wurden.

6. Diskussion.

Vor der Diskussion der in 5. mitgeteilten Meßergebnisse sei auf folgendes hingewiesen:

Bei Verfolgung des Widerstandes im Übergangsgebiet verwendete man meistens einen Kompensationsapparat und nahm bei konstant gehaltener Temperatur einzelne Werte des Widerstandes auf, wobei man zur Eliminierung von Thermokräften den Strom kommutierte und den Ausschlag mittelte. Bei polykristallinem Material ergab sich dabei für fallende und steigende Temperatur dieselbe Kurve des Widerstandes als Funktion der Temperatur. Wenn man aber den Strom nicht kommutiert und den Widerstand aus Kompensatorstellung und Galvanometerausschlägen ermittelt, so erhält man oft, auch bei Kompensation des Erdfeldes, eine andere Kurve bei fallender Temperatur als bei steigender, also eine Hysteresisschleife. Bei stärkeren Magnetfeldern wird der Hysteresiseffekt stärker und auch schon bei Stromkommutierung bemerkbar. Noch stärkere Hysteresiseffekte treten auf, wenn man durch das Übergangsgebiet nicht durch Temperaturänderung, sondern durch Änderung der Stärke eines Magnetfeldes in dem sich der Supraleiter

befindet, hindurchgeht. Gerade im letzteren Fall fand man auch schon früher, daß die durch Steigern des Magnetfeldes erhaltene Kurve meist gleichmäßig verläuft, die bei fallendem Magnetfeld aber in einzelnen Sprüngen oder aber in einem einzigen steilen Abfall. Besonders ausgeprägt waren die Sprünge bei Hg, das offenbar beim Abkühlen, wenn auch nicht zu einem Einkristall, so doch zu wenigen größeren, nicht gleichmäßig orientierten Kristallen erstarrte.

Die Hysteresiseffekte konnten bei unseren vorliegenden Messungen nicht verfolgt werden, da wir nur die Temperaturänderung, nicht aber die Temperatur selbst registrierten. Für die Diskussion der Unterschiede bei fallender und steigender Temperatur ist wesentlich, daß an demselben Einkristall registriert wurde: Der Widerstand allein als Funktion der Temperatur, der magnetische Fluß allein als Funktion der Temperatur und beide gemeinsam als Funktion der Temperatur. In allen drei Fällen treten charakteristische Unterschiede zwischen den Kurven bei steigender und fallender Temperatur auf. Man könnte daran denken, daß die Sprünge bei fallender Temperatur durch Fehlstellen im Einkristall hervorgerufen werden und zwar gerade deswegen, weil sie reproduzierbar sind. Dadurch würde aber in keiner Weise verständlich, warum die Sprünge nur bei fallender Temperatur so ausgeprägt sind, bei steigender Temperatur aber zumindest anders und sehr viel kleiner sind.

Zum Verständnis der Ergebnisse ist zunächst zu betonen, daß dadurch, daß der paramagnetische Effekt in fast gleicher Größe bei steigender und fallender Temperatur auftritt, bewiesen ist, daß auch bei steigender Temperatur ein Zerfall in einzelne getrennte supraleitende Teilchen eintritt, die sich längs der schraubenförmigen Magnetfeldlinien orientieren. Das zweite, was zum Verständnis wesentlich sein dürfte ist, daß der Ausgangspunkt beim Durchlaufen des Zwischenzustandes ein ganz anderer ist für den Fall steigender Temperatur als für den Fall sinkender Temperatur. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall der reinen Widerstandsmessung ohne zusätzliches Magnetfeld. In Fig. 15a und b ist schematisch für diesen Fall der Ausgangszustand des In-Zylinders bei steigender und bei fallender Temperatur dargestellt. Der Endzustand bei steigender bzw. fallender Temperatur ist derselbe, wie der Anfangszustand bei fallender bzw. steigender Temperatur.

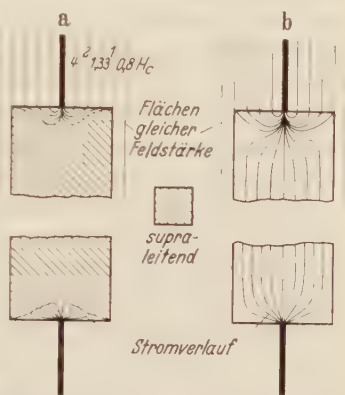


Fig. 15 a u. b. Linien gleicher magnetischer Feldstärke und Stromverlauf in einer zylindrischen Probe bei reiner Strombelastung, a) im supraleitenden; b) im normalleitenden Zustand.

Bei steigender Temperatur ist zu Beginn das Innere des Zylinders (bis auf das geringe, in den Supraleiter eindringende Magnetfeld) im wesentlichen feldfrei. Aber schon vor Beginn des Zwischenzustandes muß an den Enden des Zylinders ein kleiner Teil desselben im nichtsupraleitenden Zustand sein, da an der Eintrittsstelle des Stromes die zirkuläre magnetische Feldstärke größer ist als am Umfang des Zylinders. Die Flächen konstanter magnetischer Feldstärke werden etwa den in Fig. 15a angedeuteten Kurven entsprechen. Die nicht supraleitenden Teile werden wachsen bis die Feldstärke am Zylindermantel $H = H_c$ wird. Dann muß am Zylindermantel der supraleitende Zustand zusammenbrechen. Es wird sich im ganzen Volumen des Zylinders ein Zwischenzustand einstellen, dessen Verlauf vielleicht ähnlich dem von LONDON¹ plausibel gemachten sein wird. Mit weiter steigender Temperatur werden die nicht supraleitenden Teile wachsen, bis schließlich das ganze Volumen nicht supraleitend geworden und der Endzustand \bar{h} erreicht ist. Nach LONDON müßte beim Beginn des Zwischenzustandes ein plötzlicher Widerstandsanstieg etwa bis zum halben Restwiderstand eintreten und dann ein langsamerer Anstieg bis zum ganzen Restwiderstand. Ein derartiger Verlauf ist in Fig. 2 und 3 nicht zu erkennen, so daß das LONDONsche Bild wohl auch bei steigender Temperatur nicht ganz zutreffend sein wird. Bei früheren Messungen² an Zinn war der plötzliche Anstieg des Widerstandes bei hohen Stromstärken ausgeprägt, wenn er auch kleiner als bis zum halben Restwiderstand war. Jedenfalls kann man aber nach vorstehendem wohl verstehen, daß der Widerstandsanstieg ziemlich kontinuierlich verläuft.

Bei fallender Temperatur ist vor Erreichen der kritischen Temperatur der Verlauf der Stromlinien und der Kurven gleicher Feldstärke wie in Fig. 15b angedeutet. Der supraleitende Zustand tritt nun aber bei fallender Temperatur zuerst auf der Achse des Zylinders ein, da dort das zirkuläre Magnetfeld am kleinsten ist. Jedoch kann ein durchgehender Stromfaden längs der Achse sich nicht ausbilden, da ein solcher Stromfaden ein starkes zirkuläres Magnetfeld an seiner Oberfläche erzeugen und die Supraleitung wieder vernichten würde. Andererseits wissen wir gerade aus dem Auftreten des paramagnetischen Effektes, daß sich entlang der magnetischen Kraftlinien kleine, voneinander getrennte supraleitende Teilchen ausbilden. Es ist naheliegend anzunehmen, daß sich ohne zusätzliches äußeres Magnetfeld solche supraleitende, voneinander getrennte Teilchen den Kraftlinien des Stromes folgend auf geschlossenen Kreisbahnen nahe der Achse, etwa in Ebenen senkrecht zur Achse ausbilden werden. Mit weitersinkender Temperatur ist offenbar eine analoge Ausbildung von kleinen, ringförmig angeordneten supra-

¹ Vgl. LONDON, F.: *Superfluids*, Bd. 1, S. 120. New York 1950.

² Siehe Fußnote 1, S. 340.

leitenden Teilchen auch in etwas größerer Entfernung von der Zylinderachse möglich. Nimmt man an, daß die Wachstumsgeschwindigkeit der entstehenden supraleitenden Teilchen endlich ist, so werden beim Entstehen der äußeren Teilchen die inneren noch nicht über die äußeren hinausgewachsen sein. Zuzufolge der zunehmenden Stromübernahme durch die achsennahen Gebiete wird die Feldstärke an den inneren Teilchen wachsen und eine Ausdehnung der inneren Teilchen zunächst verhindert. Daß die Teilchen in zirkularer Richtung nicht beliebig wachsen, was experimentell z. B. durch den paramagnetischen Effekt sichergestellt ist, ist eine grundsätzliche Schwierigkeit, weil an sich an der Oberfläche eines Vollkörpers, wenn an ihr irgendwo H_c erreicht ist, an anderen Punkten die Feldstärke H kleiner als H_c sein muß. Vielleicht entfällt diese grundsätzliche Schwierigkeit, wenn man erstens annimmt, daß die supraleitenden Teilchen in zirkularer Richtung nadelförmig auslaufen und zweitens, daß ein Übergangszustand existiert, in dem λ sich allmählich ändert, wie BECK es vorschlug¹. Ob eine solche Überwindung der Schwierigkeit möglich ist, bedarf natürlich der genauen mathematischen Untersuchung. Hier genügt die experimentelle Feststellung, daß tatsächlich diskrete, längliche supraleitende Partikel im Zwischenzustand möglich sind. Bei noch weiter sinkender Temperatur wird aber schließlich ein plötzliches Zusammenwachsen der einzelnen supraleitenden Teilchen in radialer Richtung stattfinden müssen. Dabei müssen sich die magnetischen Kraftlinien plötzlich verlagern, wodurch dann wieder ein plötzliches, weiteres Wachsen der supraleitenden Teilchen verursacht sein wird. Das bedeutet aber ein plötzliches oder sehr schnelles Absinken des Widerstandes. Entstehen nun auf Kreisen mit größerem Radius neue supraleitende Teilchen, so wird sich der ganze Vorgang wiederholen und schließlich ein neuer Widerstandssprung auftreten. Bevor die Mantelfläche des Zylinders supraleitend wird, müssen aber noch immer normalleitende Teilchen bis zur Achse hinreichen, damit das Magnetfeld, bevor der vollsupraleitende Zustand eintritt, noch aus der Oberfläche entweichen kann. — Es sei indessen betont, daß natürlich sowohl bei fallender wie bei steigender Temperatur Unterkühlungs- bzw. Überhitzungserscheinungen mitspielen können, wie sie von SHOENBERG und anderen² beobachtet wurden. Auch ist nicht auszuschließen, daß bei der Bildung von supraleitenden Kernen mit Verzögerungserscheinungen zu rechnen ist. Aber man wird zunächst versuchen, mit möglichst einfachen Annahmen die Ergebnisse der Experimente zu erklären.

Wird der Zylinder nicht von einem Strom durchflossen, sondern befindet er sich in einem longitudinalen Magnetfeld, so entspricht der

¹ Vgl. Referat: Phys. Verh. 8, 181 (1954).

² Vgl. SHOENBERG, D.: Superconductivity, S. 120. Cambridge 1952.

Ausgangszustand beim Steigen der Temperatur der Fig. 16a und beim Fallen der Temperatur Fig. 16b. In a sind Kurven konstanter Feldstärke angedeutet. Durch Drehung derselben um die Achse des Körpers entstehen die Rotationsflächen konstanter Feldstärke, die maximale Feldstärke H_m ist am oberen und unteren Rand des Zylinders vorhanden. Bei steigender Temperatur wird H_m größer als H_c . Dann muß aus Gründen der Elektrodynamik und Thermodynamik ein Zwischenzustand eintreten, da das supraleitende Volumen nicht als Ganzes schrumpfen

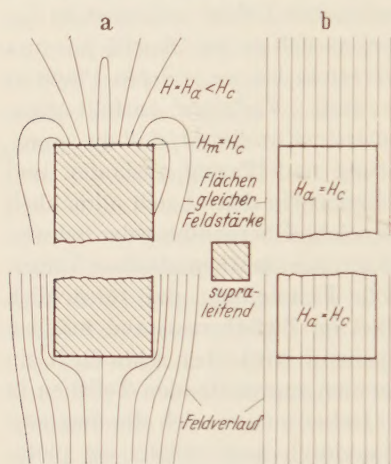


Fig. 16 a u. b. Linien gleicher magnetischer Feldstärke und Feldverlauf an einer zylindrischen Probe im longitudinalen Magnetfeld, a im supraleitenden; b im normalleitenden Zustand.

kann. Die entstehenden einzelnen normalleitenden Teilchen müssen aber alle nicht nur bei ihrem Entstehen, sondern dauernd von der Zylinderoberfläche ausgehen, damit sich die Kraftlinien schließen können. Da wir wissen, daß der magnetische Fluß mit steigender Temperatur steigt, werden sich die normalleitenden Teilchen mit steigender Temperatur immer mehr ausdehnen, bis schließlich der Endzustand erreicht ist. Es liegt zunächst kein Grund für eine sprunghafte Änderung beim Durchlaufen des Zwischenzustandes vor. Bei fallender Temperatur entspricht der Ausgangszustand der Fig. 16b. Die Feldstärke ist an allen Punkten des Zylinders

und der Umgebung dieselbe. Die Kraftlinien verlaufen parallel zur Achse. Bei sinkender Temperatur wird der Wert H_c an allen Punkten der Oberfläche zu gleicher Zeit erreicht. Wird H_c mit weiter sinkender Temperatur unterschritten, so ist im Inneren des Zylinders für alle Punkte die Wahrscheinlichkeit, daß supraleitende Bereiche entstehen, dieselbe. Der Fall, daß der Körper als Ganzes sofort supraleitend wird, ist aus analogen Gründen wie den in a im umgekehrten Falle angegebenen unmöglich. Während also bei steigender Temperatur normalleitende Teile von der Oberfläche her entstehen, können die bei fallender Temperatur entstehenden supraleitenden Teile die Oberfläche des Zylinders nicht berühren, da dann wieder ein thermodynamisch und elektrodynamisch nicht verträglicher Zustand entstehen würde. Die Teilchen werden sich entsprechend dem von v. LAUE¹ betreffs der Zerstörung länglicher supraleitender Teilchen Gezeigten, in Richtung der Kraftlinien bevorzugt ausdehnen, es tritt wieder das oben behandelte Problem auf, warum sie

¹ LAUE, M. v.: Theorie der Supraleitung, S. 119. Berlin 1947.

nicht zusammenfließen. Sie werden aber in ähnlicher Weise wie im Falle des stromdurchflossenen Zylinders in radialer Richtung zusammenfließen. Dabei wird wieder eine plötzliche Änderung des Kraftlinienverlaufs entstehen und daher eine sehr schnelle oder plötzliche Änderung des gesamten magnetischen Flusses durch den Zylinder. Daraus, daß die Registrierungen auch verschiedentlich einen plötzlichen Wiederanstieg zeigen, ersieht man, daß das Zusammenschließen der Bereiche in recht unregelmäßiger Weise geschehen muß. Bezüglich des evtl. zu berücksichtigenden Einflusses von Überhitzung und Unterkühlung oder Verzögerung bei der Kernbildung gilt das für den Stromfall Gesagte.

Befindet sich der Zylinder in einem longitudinalen Magnetfeld und ist er gleichzeitig vom Strom durchflossen, so überlagern sich offenbar die für den Stromfall und den Fall des magnetischen Flusses diskutierten Vorgänge; denn im großen und ganzen sind die Erscheinungen dieselben. Dies gilt auch für das Auftreten des paramagnetischen Effektes. Daß der Widerstand früher verschwindet als der magnetische Fluß zeigt jedenfalls, daß der durchgehende supraleitende Träger für den Strom zunächst kein die Zylinderachse umgebender, geschlossener Hohlzylinder sein kann, da dann der Fluß in ihm einfrieren müßte. Es ist aber wichtig, daß der steile Anstieg zur Spitze des paramagnetischen Effektes mit einem steilen Abfall des Widerstandes zusammenfällt, was Anhalt für eine genauere Theorie der Vorgänge gibt. Daß alle Vorgänge, soweit sie nicht schon abgeklungen sind wie beim Widerstand, bezüglich der Änderung von Fluß und Widerstand völlig synchron verlaufen, entspricht dem gegebenen Deutungsversuch und ist wohl eine Stütze für ihn.

Man kann sich fragen, ob der komplizierte Zwischenzustand, wie er so besonders deutlich bei den Versuchen am Indium-Einkristall zutage tritt, wirklich nur darauf zurückzuführen ist, daß bei einem Zylinder endlicher Länge die elektrodynamischen und thermodynamischen Bedingungen nicht gleichzeitig durch einen einfachen Übergang zu erfüllen sind oder ob etwa noch ganz andere Umstände dabei mitspielen, ob nicht etwa wie beim Ferromagnetismus eine komplizierte Struktur der neuen Phase grundsätzlich notwendig ist. Daß dies nicht der Fall ist, zeigen eindeutig Versuche, die im Herrschinger Institut von M. NÄBAUER¹ an einem Bleihohlzylinder mit zirkularem Magnetfeld angestellt wurden. Dabei sind die magnetischen Kraftlinien im Inneren des Bleizylinders völlig geschlossen, sowohl im normalleitenden wie im supraleitenden Zustand. Die magnetische Feldstärke sinkt an den ebenen Begrenzungsflächen des Zylinders kontinuierlich von dem Maximalwert an der äußeren Mantelfläche zum Minimalwert an der inneren Mantelfläche. Dementsprechend wandert auch die Phasengrenzfläche ohne komplizierten

¹ Vgl. Referat: Phys. Verh. 8, 181 (1954).

Zwischenzustand beim Senken der magnetischen Feldstärke von der äußeren bis zur inneren Mantelfläche, was experimentell nachgewiesen wurde.

Wie schon in 5. betont, sind die Maxima des magnetischen Flusses beim Steigen der Temperatur nicht genau so hoch wie beim Sinken. Trotzdem wurde versucht aus den Registrierungen die Konstanten J_g und γ der früher¹ gefundenen Beziehung $J_0 = J_g + \gamma H d$ für die Minimalstromstärke J_0 , bei der eben noch Flußverstärkung beim Durchgang der Probe durch den Zwischenzustand auftritt, zu bestimmen. Es ergeben sich dabei Werte von J_g und γ , die zu den früheren Ergebnissen einigermaßen passen. Doch ist die Genauigkeit der Bestimmung von J_g und γ aus den Registrierkurven sehr viel geringer als die früher bei ballistischen Messungen erzielte Genauigkeit. Daß dies wohl besonders daran liegt, daß man bei den ballistischen Messungen dauernd bei steigendem Feld und konstanter Temperatur mißt, wurde schon in 2. betont.

Die Arbeit wurde durch Leihgaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft weitgehend unterstützt.

Herrsching (Obb.), Riederstraße.

¹ Siehe Fußnote 1, S. 340.